

CONCLUSIONE

Giunti ai termine della nostra ricerca, vorremmo tentare di tracciare qualche considerazione nel tentativo di rilanciare alcuni interrogativi emersi dal materiale che abbiamo analizzato. Abbiamo visto, come in un primo momento l'intuizionismo stenti a imporsi quale oggetto interessante di studio nel dibattito logico matematico fatta eccezione per alcune singole polemiche dai toni accesi, che non offrivano alcuna possibilità di un reale confronto interna alle questioni sollevate, lo stile argomentativo di Brouwer aveva creato le condizioni per un isolamento pressoché totale della sua proposta dal resto del mondo matematico.

Le prime discussioni originano prendendo spunto dal rifiuto del “principio del terzo escluso”. Era questo uno degli aspetti più provocatori della critica brouweriana alla teoria classica, ma nello stesso tempo anche più facilmente isolabile dagli eccessi di soggettivismo e misticismo che spesso avevano appesantito i toni della questione. ²⁴¹

In un primo tempo Rolin Wave interpreta la critica intuizionista nel senso di una richiesta maggiore di rigore nei confronti dei mezzi concettuali impiegati in logica e considera dunque Brouwer come un empirista radicale.

I due belgi Barzin ed Errera vanno oltre mettendo in atto un tentativo di interpretare l'intuizionismo come “logica tripartita”, dove al vero e al falso si affianca un ulteriore stato logico della proposizione, la “terzità”. I due studiosi aprono così uno spazio per l'interrogazione intorno ai valori di verità della teoria brouweriana e si impegnano in un primo tentativo di delineare formalmente alcune distinzioni essenziali rispetto alla logica classica. Si continua tuttavia ad avere un'idea troppo nebulosa di che cosa sia la logica intuizionista e fino a che punto se ne possa parlare. Si ritiene generalmente la posizione di Brouwer una posizione tesa a esasperare alcuni punti deboli dei metodi concettuali classici e si rifiuta l'idea di prendere in qualche considerazione la parte positiva del ²⁴¹ suo pensiero.

All'interno di questo contesto resta anche il contributo di F. Levy, anche se la distinzione che tenta di mettere in risalto tra “semplice enunciato di una proposizione” e “dimostrazione della proposizione stessa”, pone un ulteriore motivo di riflessione che si rivelerà estremamente fecondo.

Un passo decisivo sulla via della formalizzazione è fatto da Glivenko. Anche se preceduto in parte da A.N. Kolmogorov, che delinea però un sistema formale che adesso chiameremo “minimale” sulla scia del lavoro di I. Johansson, Glivenko arriva per primo alla costituzione di un vero e proprio sistema formale intuizionista, seppure ancora poco elegante, e traccia alcune basilari connessioni tra questo e il sistema classico. È un lavoro che riteniamo di particolare importanza, poiché getta una prima base di appoggio per tutte le indagini successive e contribuisce a fare emergere la sensazione che, seguire la via della formalizzazione non significhi necessariamente ²⁴³ snaturare il pensiero di Brouwer, ma che in un certo senso sia indispensabile tentare questa strada per non costringere i tratti determinanti della proposta intuizionista all'interno di un dibattito nebuloso.

È questo il grande contributo apportato da A. Heyting. Il suo atteggiamento nei confronti della formalizzazione è comunque duplice. Non ha nessuna pregiudiziale nei suoi confronti, tuttavia non cessa di mantenere aperta la riflessione sulla legittimità di tale operazione. Ciò gli consente di non permanere nell'atteggiamento di chiusura brouweriano, senza però per questo perdere mai la misura dei limiti che la formalizzazione mantiene per la logica intuizionista. È ciò che a nostro parere diventa determinante per rilanciare i temi strutturanti del dibattito sull'intuizionismo. Il sistema di Heyting assume la funzione di un terreno di mediazione intorno al quale cominciano

ad addensarsi numerosi lavori e sentieri di ricerca. In particolare si va lentamente evidenziando il peso ²⁴⁴ e la sostanziale inutilità del supporto metafisico, cui Brouwer aveva voluto vincolare la proposta intuizionista.

Un notevole interesse riveste in primo luogo il problema di interpretare il sistema, cui Heyting ha dato forma, in un'ottica che si vuole ancora strettamente intuizionista. Un primo suggerimento a proposito proviene dallo stesso autore e ne abbiamo visto l'articolarsi attraverso un acceso dibattito con H. Freudenthal. Tramite il recupero della nozione di "dimostrabilità", introdotta da Levy, Heyting giunge a proporre un'interpretazione dell'enunciato intuizionista in termini di "aspettativa" o "intenzione di costruzione". Permane ancora tuttavia a tratti in maniera piuttosto viva, e in particolare in Freudenthal, l'impressione che un sistema formale perda necessariamente il riferimento diretto con lo spirito di fondo della critica brouweriana.

Rilevante è anche la proposta di Kolmogorov di interpretare ²⁴⁵ il sistema intuizionista come "calcolo di problemi". Abbiamo visto, infatti, come pur partendo da una base indipendente da presupposti e supposizioni intuizioniste, questo tentativo si dimostra particolarmente idoneo a mettere in luce i tratti distintivi del calcolo di Heyting.

Ma soprattutto ci premeva sottolineare come l'opera di formalizzazione dell'olandese riproponga la logica intuizionista all'attenzione di studiosi che certo non ne condividevano le premesse di fondo. Si abbandona in questo caso la richiesta dell'uso esclusivo di strumenti strettamente intuizionisti e ci si avvale di qualsiasi mezzo razionale a disposizione. Il sistema formale di Heyting si rivela in questo modo fonte di una serie di risultati sorprendenti e in larga parte inaspettati. Emblematici in questo senso si sono dimostrati gli articoli di Gödel che aprono numerosi campi di ricerca. È in particolare degna di nota la possibilità di ottenere, attraverso un'apposita traduzione, la ricostruzione di tutti i teoremi ²⁴⁶ dell'aritmetica classica in quella intuizionista. Ciò in primo luogo permette di prendere le distanze da un tipo di critica che aveva visto nell'intuizionismo una proposta specificatamente limitativa e di semplice restrizione sui mezzi concettuali impiegati. (È sempre di Gödel l'osservazione che il rifiuto del "principio del terzo escluso non porta alcun effetto particolare di limitazione nella teoria). Inoltre, ha un rilevante effetto retroattivo, mostrando ai membri della scuola hilbertiana l'impossibilità di continuare a considerare sinonimi "intuizionismo" e "finitismo".

Ma gli articoli in questione mettono anche in risalto come fossero superflui alcuni tratti specifici del linguaggio e dello stile di presentazione di Brouwer, in quanto attraverso il sistema di Heyting le stesse problematiche concernenti l'aritmetica erano riproponibili in un contesto più accessibile e non troppo distante da quello classico.

La riflessione di Johansson permette inoltre di ²⁴⁷ evidenziare come il sistema intuizionista sia perfino assumibile come base per l'indagine di ulteriori sistemi logici. Infine, abbiamo voluto chiudere questo lavoro con l'articolo di A. Tarski sui rapporti tra calcolo proposizionale e topologia, in quanto, lo riteniamo uno dei risultati che ha consolidato maggiormente l'opinione sulla necessità di riconsiderare la natura della proposta brouweriana. Il sistema intuizionista si mostra in quello scritto idoneo ad essere trattato come un oggetto matematico a tutti gli effetti analogamente al caso classico, senza che per questo venga meno la sua peculiarità. ²⁴⁸

BIBLIOGRAFIA

AA. VV., *Atti del convegno internazionale di storia della logica*, San Gimignano, 4-8 dicembre 1982, a cura di V. Abrusci, E. Casari, M. Mugnai, Editrice Clueb, Bologna 1983.

BARZIN, M., *Sur la crise contemporaine des mathématiques*, "Enseignement mathématique", vol. 34, 1935-36, pp. 5-11.

BARZIN, M., ERRERA, A., *Sur la logique de M. Brouwer*, "Acad. Roy. de Belg. Bull. de la Cl. des Sc." (5), vol. 13, 1927, pp. 56-71.

– *Sur le principe du tiers exclu*, "Archives de la Société belge de Philosophie", vol. 1. n. 2, 1929.

– *Sur la logique de M. Heyting*, "Ens. math", vol. 30, 1931-32, pp. 248-250.

– *Note sur la logique de M. Heyting*, "Ens. math.", vol. 31, 1933, pp. 122-24.

– *Sur la logique intuitionniste*, "Ens. math.", vol. 31, 1933, pp. 273-274.

– *La logique de M. Brouwer. Etat de la question*, "Bulletin mathématique de la Société roumaine des Sciences", vol. 35, 1933, pp. 51-52.

BECKER, O., *Zur Logik der Modalitäten*, "Jahr. f. phil. u. phänomenol. Forsch.", XI, 1930. ²⁴⁹

BERNAYS, P., *Axomatische Untersuchung des Aussagenkalkül der "Principia mathematica"*, "Math. Zeitschr.", 25, 1926, pp. 305-320.

BETH, E.W., *I fondamenti logici della matematica*, Feltrinelli, Milano 1963.

BROUWER, L.E.J., *Over de grondslagen der wiskunde*, Thesis, Amsterdam, 1907.

– *Intuitionism and formalism*, "Bulletin of the American Math. Soc.", vol. 20, 1913, pp. 81-96.

– *Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionstheorie*, "Journ. Math.", CLIV, 1923.

– "Consciousness, Philosophy and Mathematics", *Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy*, Amsterdam 1948..

– *Historical background principles and methods of intuitionism*, "South.-African J. Sci." 49, 1952, pp. 139-146.

– *Lezioni sull'intuizionismo*, Boringhieri, Torino 1984,

CANTINI, A., *I fondamenti della matematica*, Loescher, Torino 1979. ²⁵⁰

CASARI E., *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli, Milano 1964.

– (a cura di) *Dalla logica alla metalogica. Scritti fondamentali di logica matematica*, Sansoni, Firenze 1979.

– *La logica del Novecento*, Loescher, Torino 1981.

ERRERA A., *Sur le principe du tiers exclu*, "Mathematica" (Cluj), vol. 9, 1932, pp. 73-79.

– *Quelques remarques sur les mathématiques intuitionnistes. A propos des plusieurs notes de M. Heyting*, "Revue de métaphysique et de morale", vol. 56, 1933, pp. 27-39.

FREUDENTHAL H., *Review of Heyting's "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik"* I, II, III, "Jahr. über die Fortschritte der Mathematik", vol. 56, 1930, pp. 823-824.

– *Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln*, "Compositio Math.", vol. 4, 1936, pp. 112-116.

GLIVENKO V., *Sur la logique de M. Brouwer*, "Acad. Roy. de Belg. Bull. de la Cl. des Sc. (5) vol. 14, 1928, pp. 225-228.

– *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, "Acad. Roy. de Belg. Bull. de la Cl. des Sc." (5). vol. 5, pp. 183-188.

GENTZEN, G., *Untersuchungen über das logische Schliessen*, “Math Zeitschr.”, 39, 1935, pp. 176-210. ²⁵¹

GÖDEL K., *Collected Works*, vol. 1, *Publications 1929-36*, Oxford University Press, Clarendon Press, New York Oxford.

HEYTING A., *Die formalen Regeln der intuitionistischer Logik*, “Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl.”, Berlin, 1930, pp. 42-56.

– *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik*, “Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl.”, Berlin 1930, pp. 57-71, pp. 158-69.

– *Sur la logique intuitionniste*, “Akad. Roy. de Belg. Bull. de la Cl des Sc.” (5), vol. 16, 1930, pp. 57- 963.

– *A propos d'un article de MM. Barzin et Errera*, “Ens. Math.”, vol. 31, 1932, pp. 121-22.

– *Sur la logique intuitionniste. Réponse à MM. Barzin et Errera*, “Ens Math.”, vol. 31, 1932; pp. 271-272, 274-275.

– *Die intuitionistischen Grundlegung der Mathematik*, “Erkenntnis”, 2, 1931, pp. 106-115.

– *Bemerkungen zu dem Aufsatz von Herrn Freudenthal “Zur intuitionistischen Deutung logischer Formeln”*, “Compositio Math.” vol. 4, 1936, pp. 117-118.

– *Les fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration*, Gauthier-Villars, Paris 1955.

– “Some remarks on intuitionism”, *Constructivity in Mathematics*, Proceedings Colloquium Amsterdam 1957”, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1959, pp. 69-71.

– *History of the foundations of mathematics*, “Nieuw Archief voor Wiskunde” (3) vol. 26, 1978, pp. 1-21. ²⁵²

JASKOWSKI S., *Recherche sur le système de la logique intuitionniste*, “Actes du Congrès International de Philosophie scientifique, Paris, part. IV, 1936, pp. 58-61.

JOHANSSON I., *Der minimal Kalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus*, “Compositio Math.”, vol. 4, 1936, pp. 119-136.

KHINTCHINE M.A., *Objection à une note de MM. Barzin et Errera*, “Acad. Roy. de Belg. Bull. de la Cl. des Sc.”, (5) vol. 14, 1928, pp. 223-224.

KOLMOGOROV A.N., *O principe tertium non datur*, “Matematicheskii Sbornik”, 22, 1925, pp. 646-667.

– *Zur Deutung der intuitionistischen Logik*, “Math. Zeitschrift.” vol. 35, 1932, pp. 58-65.

LEVY P., *Sur le principe du tiers exclu*, “Revue de métaphysique et de morale”, vol. 33, 1926, pp. 253-258.

– *Critique de la logique empirique*, “Revue de métaphysique et de morale”, vol. 33, 1926, pp. 545-51.

– *Logique classique, logique brouwerienne, logique mixte*, “Acad. Roy de Belg. Bull. de la Cl., des Sc.” (5), vol. 13, 1927, pp. 256-266.

REID, C., *Hilbert*, Springer Verlag, New York 1970.

TARSKI, A., *Der Aussagenkalkül und die Topologie*, “Fundamenta Mathematicae”, vol. 31, 1938, pp. 103-134. ²⁵³

TROELSTRA A.S., *The scientific work of A. Heyting*, “Compositio math.”, vol. 20, 1968, pp. 3-11.

– “A. Heyting on the formalization of intuizionistic mathematics”, *Two decades of mathematics in the Netherlands 1920-940*, part I, Mathematical Centre, Amsterdam, 1978, p. 153-175.

– A. Heyting and his contributions to intuitionism, “Nieuw Archief voor Wiskunde (3)”, vol. 29, 1981, pp. 1-35.

VAN HEIJENOORT J., (a cura di), *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1967.

WAVRE R., *Y:a-t-il una crise des mathématiques? A propos de la notion d'existence et d'une application suspecte du principe du tiers exclu*, “Revue de métaphysique et de morale”, vol. 1, 1924, pp. 435-70.

– *Logique formelle et logique empiriste*, “Revue métaphysique et de morale”, vol. 33, 1926, pp. 65-75.

– *Sur le principe du tiers exclu*, “Revue de métaphysique et de morale”, vol. 33, 1926, pp. 425-430.

– *Sur les propositions indémonstrables*, “Ens. Math.” vol. 27, 1928, pp. 321-324.

WHITEHEAD A. N., RUSSELL B., *Principia Mathematica*, The Cambridge University Press, Cambridge, 1925.

ZELLINI P., *La ribellione del numero*, Adelphi, Milano 1985.

INTRODUZIONE p. I

Capitolo primo

IL DIBATTITO INTORNO AL RIFIUTO DEL "PRINCIPIO DEL TERZO ESCLUSO" NELL'INTUIZIONISMO DI BROUWER

1. Esistenza e verità nell'intuizionismo di Brouwer. Il rifiuto del "principio del terzo escluso". p. 1
2. Esiste una crisi della matematica? Rolin Wavre e la prudenza dell'atteggiamento empirista. p. 14.
3. Marcel Barzin, Alfred Errera e la proposizione "terza" nella logica brouweriana. p. 24.
4. Paul Levy: logica classica, logica mista, logica brouweriana. Il semplice enunciato di una proposizione e la sua affermazione brouweriana. p. 37.

Capitolo secondo

LA FORMALIZZAZIONE DELLA LOGICA INTUIZIONISTA

1. Il calcolo di A.N. Kolmogorov. p. 53.
2. Glivenko e l'illegittimità della proposizione "terza". p. 77.
3. Il calcolo di A. Heyting. p. 90.

Capitolo terzo

PRIMI TENTATIVI DI INTERPRETAZIONE DELLA LOGICA INTUIZIONISTA

1. A. Heyting e la "logica amplificata". p. 126.
2. Lo scambio epistolare tra Heyting e Freudenthal. L'interpretazione dell'implicazione logica. p. 138.
3. Il calcolo dei problemi di A.N. Kolmogorov. p. 149.
4. L'interpretazione delle formule logiche intuizioniste di H. Freudenthal. p. 165.
5. K. Gödel: l'introduzione del simbolo B . p. 179.
6. Il calcolo minimale di I. Johansson. p. 197.
7. Topologia e calcolo proposizionale intuizionista. p. 211.

CONCLUSIONE p. 240.

BIBLIOGRAFIA p. 248.