CAPITOLO SECONDO

LA FORMALIZZAZIONE DELLA LOGICA INTUIZIONISTA

1. *Il calcolo di A.N. Kolmogorov*

In questo capitolo ci volgeremo a, trattare gli sforzi più significativi fatti al fine di delucidare il posto che venivano ad assumere alcune idee fondamentali di Brouwer all'interno del sistema delle leggi logiche. Tentativi che non evitarono l'uso dello strumento della formalizzazione, ma che anzi da questo portarono nuovo vigore ai principi del matematico olandese. In questa trattazione occupa senza dubbio un posto primario l'opera del matematico sovietico A.N. Kolmogorov. Analizzeremo in un primo tempo lo scritto pubblicato nel 1925 in *Matematiceskii Sbornik* dal titolo *O principe tertium non datur*. Nonostante la sua data di pubblicazione sia anteriore ai contributi analizzati nel primo capitolo, questo articolo segna senza dubbio un decisivo passo avanti nell'analisi delle idee di [54] Brouwer e un apporto maggiore al tentativo di individuare un calcolo logico intuizionista. L'articolo rimase inoltre a lungo, sconosciuto, anche se è possibile ipotizzare che perlomeno Khintchine, che aveva in Unione Sovietica rapporti di collaborazione con Kolmogorov, ne avesse già preso visione. Pensiamo comunque che sia opportuno accostarlo maggiormente alle opere. successive di V. Glivenko e A. Heyting.

In questo articolo, Kolmogorov, oltre a delineare, una presentazione assiomatica della logica generale degli enunciati valida dal punto di vista intuizionista, segna una serie importante di risultati intorno ai differenti rapporti intrattenuti tra questa e la teoria classica, decretando l'opportunità, per la matematica, di una coesistenza delle due posizioni. L'interrogazione di Kolmogorov parte da due constatazioni. La severa critica di Brouwer nei confronti dell'uso del "principio del terzo escluso" avrebbe potuto far supporre che in breve tempo ci si sarebbe trovati di fronte all'emergenza di una serie di contraddizioni derivanti [55] da questo uso illegittimo e ciò non si era dato e non si lasciava prevedere una svolta in tal senso. Inoltre per lo più questa illegittimità non veniva neanche avvertita.

La visione di Kolmogorov non evidenzia una netta opposizione tra la matematica classica e quella intuizionista, tende anzi a mettere a fuoco e a dimostrare in parte una possibile traducibilità della prima nella seconda, che ritiene non comportare particolari difficoltà, come invece si rivelerà più tardi nei lavori che svilupperanno questa idea.

Un punto che guida la sua indagine è proprio la presa di distanza dal rifiuto di Brouwer di attribuire una qualche validità a quelle conclusioni che, sebbene finitarie, erano state ottenute attraverso un uso transfinito del "principio del terzo escluso". Kolmogorov, infatti, mira a dimostrarne la correttezza e la derivabilità indipendentemente da un uso illegittimo del transfinito. Occorre considerare, a questo scopo, l'enunciato dal punto di vista della "pseudoverità", intendendo per pseudoverità [56] di un enunciato la sua doppia negazione. In questo ambito l'uso del "principio del terzo escluso" non comporta particolari problemi di legittimità. "Noi dimostreremo che ogni conclusione, ottenuta con l'aiuto del 'principio del terzo escluso', è corretta qualora ogni enunciato che entra nella sua formulazione venga sostituito da un enunciato che asserisce la sua doppia negazione".[1]

La riflessione di Kolmogorov è soprattutto sostenuta, a differenza della maggior parte degli scritti che abbiamo analizzato nel corso del primo capitolo, da una profonda interrogazione intorno ai presupposti della logica intuizionista. Infatti, si cura di mettere in evidenza quali siano le richieste che le due diverse prospettive, formalista e intuizionista, avanzano nei confronti di ogni sistema matematico, senza sottoporre il suo lavoro immediatamente all'esigenza di rintracciare un punto, di vista che uniformi le due posizioni su un unico piano, dove sia appurabile la maggiore verità dell'una rispetto all'altra. [57]

Quel che preme far emergere a Kolmogorov è come la differenza fra le due prospettive, pur costringendo da un lato a una completa rielaborazione del problema della verità e della falsità di una proposizione matematica, lasci larghi spazi di compatibilità e di reciproca indipendenza che, individuati, permangono come oggetto di interesse sia per l'intuizionista sia per il formalista.

La matematica per il formalista si edifica su una scelta arbitraria, quella degli assiomi ovvero particolari combinazioni di simboli che le servono da base insieme ad alcune regole per la formazione di nuove formule. Il requisito richiesto, oltre a possibili criteri di convenienza pratica, è la loro consistenza, cioè l'impossibilita di derivare dagli assiomi attraverso le regole ammesse una formula che appartenga a quelle isolate deliberatamente tra tutte le differenti possibili combinazioni di simboli come false.

Per l'intuizionista, invece, il punto di partenza è "il riconoscimento del reale significato delle proposizioni matematiche".[2] Gli assiomi non possono dunque essere più [58] convenzionalmente ma "sono adottati per esprimere fatti che ci sono dati".[3]

Se questi dunque anno informazioni sull'oggetto che stiamo prendendo in considerazione durante la ricerca, allora non è più ammissibile accettare gli assiomi in base alla loro mutua compatibilità.

Per il formalista trovarsi di fronte a una proposizione qualsiasi che, senza essere contraddittoria, non è derivabile dagli assiomi, non rappresenta un problema di fondamentale interesse. Infatti, ciò che si evidenzia in questo caso è l'incompletezza del sistema assiomatico che ci siamo dati e che può venire sempre completato attraverso la semplice aggiunta di quella stessa formula o della sua negazione a nostro piacimento.

Diversamente vanno le cose per gli intuizionisti. Se non si da la possibilità di aggiungere questa proposizione agli assiomi del sistema, perché non ne deriva la sua verità o la sua falsità da un esame diretto, la proposizione deve essere considerata indeterminata.

Kolmogorov sposta ora l'attenzione verso la "logica [59] generale degli enunciati", intesa come "la scienza che studia le proprietà di enunciati arbitrari indipendentemente dal loro contenuto e per quanto concerne a loro verità, la loro falsità e i modi in cui essi sono derivati".[4]

---

[1] A.N. Kolmogorov, *O principe tertium non datur*, in "Matematiceskii Sbornik", xxxii, pp. 646-667, trad. V.M. Abrusci in *Dalla logica alla metalogica*, a cura di E. Casari, Sansoni, Firenze 1979, pp. 167-194.
[2] Ivi, p. 169.
[3] *Ibidem*.
[4] Ivi, p. 170.

"Nella logica degli enunciati, l'enunciato è considerato l'elemento ultimo dell'indagine. Quando noi consideriamo l'enunciato indipendentemente dalla sintesi di soggetto e predicato, contenuta in esso, resta solo la proprietà caratteristica di un enunciato, quella che lo distingue da altre forme di espressioni e che fu stabilita da Aristotele: esso può essere valutato dal punto di vista della verità o della falsità".[5]

Entro questo ambito è possibile riconsiderare il problema degli assiomi privilegiando la ricerca intorno alle loro basi intuitive e al significato implicitamente attribuito ai connettivi impiegati. Ciò risulta particolarmente interessante a proposito della negazione. Kolmogorov non si pone, invece, il problema dei connettivi $\wedge$ e $\vee$ che esprime attraverso la combinazione di $\rightarrow$ e $\overline{\ }$. [60] La sua analisi parte proprio dal sistema dato da Hilbert nel 1922, che fa uso solo di questi due simboli. Kolmogorov fondamentalmente vuole discutere il problema se nell'intuizionismo sia ricostruibile la logica classica e a questo scopo gli bastano $\rightarrow$ e $\overline{\ }$. Glivenko e Heyting hanno invece fatto notare che per l'intuizionismo occorre dare assiomi specifici anche per $\wedge$ e $\vee$, che non sono completamente esprimibili con $\rightarrow$ e $\overline{\ }$ come invece è possibile in logica classica.

Considerati A, B, C come enunciati arbitrari, Hilbert dava quattro assiomi per l'implicazione:

1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2) $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$
3) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$
4) $(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

e due per la negazione:

5) $A \rightarrow (\overline{A} \rightarrow B)$
6) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((\overline{A} \rightarrow B) \rightarrow B)$,[6] [61] intendendo per $\overline{A}$, $\sim A$.

Per quanto riguarda l'implicazione, Kolmogorov mostra come gli assiomi mantengano una relazione con il loro fondamento intuitivo, cioè come la loro verità risulti evidente a partire da un'interpretazione corretta che è stata data al connettivo. "Il significato di $A \rightarrow B$ si esaurisce nel fatto che, una volta convinti della verità di A, dobbiamo accettare anche la verità di B. Oppure, nell'interpretazione formalista: se viene registrata una formula A, dobbiamo registrare anche la formula B. Così la relazione di implicazione tra due enunciati non stabilisce alcuna connessione tra i loro contenuti".[7] Ne deriva che l'applicazione di questi assiomi a enunciati arbitrari non comporta problemi particolari.

Più complessa è l'analisi del simbolo $\overline{\ }$ per quanto si riferisce alla sua applicazione nella logica generale degli enunciati. Infatti, per Kolmogorov è determinante, ai fini di un'interpretazione del connettivo $\overline{\ }$, il modo in cui guardiamo all'enunciato che vogliamo negare. [62] Se, infatti, lo consideriamo come un tutto, allora la sua negazione attesta l'interdizione a considerarlo vero. È questa l'interpretazione che ne dava Brouwer nel 1923, quando definiva la negazione come "assurdità". Se viceversa consideriamo l'enunciato come un'attribuzione di un predicato a un soggetto, la sua

---

[5] Ivi, p. 172.
[6] [Nota di AS. Questa è una tesi classica ma non intuizionista.]
[7] Ivi, p. 172.

negazione afferma allora l'incompatibilità di questo soggetto e di quel predicato. È solo la prima di queste due interpretazioni a essere espressa dal simbolo della logica degli enunciati. Tuttavia la logica tradizionale ha pensato di poter passare senza conseguenze da questa alla seconda, vista come più originaria. Questa operazione, afferma Kolmogorov, non e sempre possibile. "Nella misura in cui la negazione di un enunciato è il risultato di un esame diretto, la seconda interpretazione, che parte dall'idea dell'impossibilità della sintesi che crea l'enunciato è di fatto più vicina alla sostanza della cosa di quanto non lo sia la prima, che si fonda sull'idea puramente formale di interdizione. [63] Ma quando una negazione è ottenuta come risultato di una derivazione, la riduzione della prima interpretazione alla seconda non è più necessaria e, nel caso degli enunciati matematici, è talvolta addirittura impossibile".[8]
Tenendo presente, dunque, che l'interpretazione data da Brouwer è indipendente e che, pur basandosi sulla seconda ne è più vasta, entrambi gli assiomi che Hilbert ha dato per la negazione diventano secondo Kolmogorov inaccettabili da un punto di vista intuizionista. Ciò non è tanto determinante per quel che concerne il primo assioma hilbertiano. Questo, infatti, è rifiutato in nome di una mancanza totale di fondamento intuitivo in quanto "asserisce qualcosa sulle conseguenze di una cosa impossibile"[9]; rifiuto questo dunque indipendente dall'interpretazione che viene data, alla negazione.

Occorre notare a questo proposito che il rifiuto del primo assioma hilbertiano della negazione, la legge conosciuta come "legge di Duns Scoto, non sarà successivamente condiviso né da Glivenko né da Heyting i [64] quali lo annoverano tra i loro assiomi per il connettivo $\neg$, espresso sotto questa forma $\neg a \rightarrow (a \rightarrow b)$. L'assioma non era stato inoltre direttamente colpito dalla critica brouweriana. Questo aspetto viene invece sviluppato ulteriormente, come vedremo, nel 1936 dal danese Johansson che con l'aggiunta di assiomi per i connettivi $\wedge$ e $\vee$ porta all'individuazione di una logica che resta conosciuta con il nome di "logica minimale". Il sistema di Kolmogorov è dunque essenzialmente un sistema minimale.

Diversamente vanno le cose nel caso del secondo assioma di Hilbert che rappresenta una formulazione particolare del "principio del terzo escluso": *se B segue sia da A che da $\bar{A}$, allora B è vero*. Anche se avverte che un tale tentativo non e mai stato compiuto, Kolmogorov sembra dell'opinione che sia impossibile una convalida del "principio del terzo escluso" sotto una qualsiasi forma partendo dall'interpretazione che dà Brouwer della negazione. Questo principio conserverà validità solo in alcuni casi specifici per cui occorre andare [65] a considerare sempre la relazione tra il predicato e il soggetto. La sua validità deve essere dunque circoscritta solo all'ambito finitario, dove è sempre possibile una verifica per ogni caso specifico.

Per quanto riguarda l'intuizionismo Kolmogorov per la negazione dà un solo assioma, che chiama "principio dl contraddizione", e che è vero all'interno dell'interpretazione della negazione come interdizione a considerare vero un enunciato:

5a) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow \bar{A})$

ovvero: *se da A segue sia la verità che la falsità di un enunciato B, allora è lo stesso A che è falso*. È un principio di contraddizione più vasto di quello considerato

---

[8] Ivi, p. 173.
[9] Ivi, p. 174.

usualmente (*un enunciato non può essere vero e falso allo stesso tempo*) e inoltre vi si deriva, con il primo assioma dell'implicazione, anche la *reductio ad absurdum: se B è vero e se da A segue la falsità di B, allora A è falsa*.[10]

Questo assioma unito ai quattro per l'implicazione forma il sistema *B*. [66] "Chiamerò sistema *B* il sistema dei cinque assiomi (i quattro assiomi dell'implicazione 1-4 e l'assioma della negazione 5a sopra adottati). Non conosciamo nessuna formula della logica generale degli enunciati che possegga evidenza intuitiva quando venga applicata a enunciati arbitrari, ma non sia dimostrabile a partire da questo sistema di assiomi. Nondimeno, la questione se questo sistema di assiomi sia un sistema completo per la logica generale intuizionista degli enunciati resta a parte".[11]

Kolmogorov avverte qui, come più tardi anche Heyting, la delicatezza che assume il problema della completezza per un sistema assiomatico intuizionista, senza però sviluppare ulteriormente la questione. Nell'ambito del finitario, ambito che non è facile delimitare, "il principio del terzo escluso" mantiene validità. Analogamente vale anche il principio della doppia negazione:

7) $\overline{\overline{A}} \to A$.

Kolmogorov indica con *H* il sistema che si ottiene aggiungendo [67] questo principio come assioma al sistema *B*. È possibile mostrare come questo sistema risulti equivalente a quello dato da Hilbert. Avendo in comune gli assiomi relativi all'implicazione, basterà far vedere la reciproca dimostrabilità delle formule 5-6 e 5a - 7. Inoltre, il sistema *H* è completo e vi si possono derivare tutte le formule della logica degli enunciati tradizionale in modo che, se consideriamo solo enunciati arbitrari finitari. (*A'*, *B'*, *C'*...), esse risultano tutte vere. Questa restrizione comporta alcuni problemi.

Kolmogorov si volge così a 'studiare il campo di applicabilità della logica formata dal sistema *H*, che chiama logica speciale degli enunciati, nel tentativo di trovarne una precisa delimitazione. A questo scopo introduce alcuni simboli *A*°, *B*°, *C*°... , che rappresentano "enunciati arbitrari per i quali l'enunciato stesso deriva dalla propria doppia negazione"[12] e sottolinea come siano di questo tipo tutti gli enunciati finitari.

Riformula anche l'assioma, 7 che rifiuta nella sua forma originaria e conserva come vero solo sotto questa [68] forma:

7a) $\overline{\overline{A^\circ}} \to A^\circ$.

Per mostrare come tutte le formule della logica speciale degli enunciati siano vere per enunciati di tipo *A*° deve adesso assicurarsi che l'uso dell'assioma della doppia negazione sia possibile anche nel caso di formule complesse, cioè mostrare come anche queste risultino in definitiva essere di tipo *A*°. Le dimostrazioni che svolge Kolmogorov riguardano gli enunciati negativi e quelli della forma $A^\circ \to B^\circ$; da questi due, infatti, è possibile passare ad analizzare tutti i casi più complessi.

Per quanto concerne i primi, la dimostrazione era stata già fornita da Brouwer nel 1923. È un teorema che abbiamo già considerato: $\sim\sim\sim A \to \sim A$ equivale infatti ad asserire che tutti gli enunciati negativi sono di tipo *A*°.

---

[10] [Nota di AS. Questa è una forma di *modus tollens*: $(B \wedge (A \to \overline{B})) \to \overline{A}$]

[11] Ivi, pp. 175.

[12] Ivi, p. 179.

Anche per quanto riguarda l'implicazione, la dimostrazione che ne dà Kolmogorov non comporta particolari problemi. [69] Ottiene infatti facilmente

$$\overline{\overline{(A \to B)}} \to (\overline{\overline{A}} \to B)$$

vera per enunciati arbitrari A, B. Sostituendo ad A e B rispettivamente $A°$e $B°$ questo enunciato diventa:

$$\overline{\overline{(A° \to B°)}} \to (\overline{\overline{A°}} \to B°)$$

e applicando il principio della doppia negazione nella forma 7a all'enunciato elementare $B°$

$$\overline{\overline{(A° \to B°)}} \to (A° \to B°)$$

che è proprio ciò che Kolmogorov, vuole mostrare. “Ora possiamo asserire che tutte le formule della logica degli enunciati sono vere per enunciati di tipo $A°$, inclusi tutti gli enunciati finitari e quelli negativi (...). É stata così trovata la delimitazione precisa del campo di applicabilità della logica speciale degli enunciati: esso coincide con quello di applicabilità della formula della doppia negazione 7”. [13] Ora l'intento di Kolmogorov è quello di far emergere una questione analoga per le formule della matematica. Si chiede, infatti, “ponendo alcune restrizioni alla [70] loro interpretazione reale, si può in un modo simile dare significato a tutte quelle formule della matematica, che vengono dimostrate con un uso illegittimo cioè, al di fuori del loro campo di applicabilità) delle formule della logica speciale degli enunciati, in particolare con l'uso del1principio del terzo escluso?”.[14] Scopo principale e quello di dimostrare una possibile traducibilità della matematica classica in quella intuizionista.

Costruisce così una nuova matematica, o pseudomatematica facendo corrispondere ad ogni formula della matematica ordinaria una nuova formula di tipo $A°$: la formula $S*$, che esprime la doppia negazione di S, indicata poi con nS. Vale dunque: $nS = \overline{\overline{S}}$.

Successivamente mostra come ad ogni dimostrazione corretta che è possibile effettuare nella matematica ordinaria corrisponde nella pseudomatematica una dimostrazione altrettanto corretta. Chiama inoltre “assiomi di tipo K” quegli assiomi della prima ai quali [71] corrispondono formule vere nella seconda. Analogamente indica tutte le formule che è possibile dimostrare su questa base come di “tipo K”. Gli assiomi e le formule della matematica che conosciamo rientrano tutti tra quelli di questo tipo. Questa asserzione è forse azzardata: ne seguirebbe infatti direttamente che tutta la matematica classica è consistente intuizionisticamente.

Ora per questa parte della nuova matematica diventa perfino inappropriato il termine di “pseudomatematica”, in quanto tutte le sue formule sono vere e ha quindi acquistato un significato reale. Kolmogorov è dell'opinione che sia più adeguato il termine di “matematica della pseudoverità” intendendo per pseudoverità di un enunciato S la verità della sua doppia negazione nS. “Un enunciato della forma nS asserisce così la pseudoverità dell'enunciato S. Le formule della pseudomatematica esprimono sempre solo enunciati sulla pseudoverità. Abbiamo quindi il diritto di

[13] Ivi, pp. 181-182.
[14] Ivi, p. 182.

chiamare "matematica della pseudoverità" quella parte della pseudomatematica [72] che ha significato reale".[15]

Se, quindi, da un lato ci proibiamo di prendere in considerazione le conclusioni della matematica ordinaria e abbiamo ottenuto attraverso un uso illegittimo, esteso al transfinito, di principi logici come quello del terzo escluso o della doppia negazione, tuttavia ci è consentito annettere alla matematica della pseudoverità tutte quelle formule che deriviamo con l'uso della doppia negazione e di assiomi che siano esclusivamente di tipo *K* (e tutti gli assiomi che conosciamo, sottolinea nuovamente Kolmogorov, sono di questo tipo). "In altre parole, tutte le conclusioni che si fondano sugli assiomi di tipo *K* e sulle formule della doppia negazione sono corrette qualora noi intendiamo ogni enunciato che compare in esse nel senso dell'asserzione della sua pseudoverità, cioè della sua doppia negazione".[16]

In questa maniera Kolmogorov trova un modo per giustificare, sotto queste condizioni, cioè a patto di dare un'interpretazione limitata a tutte le proposizioni [73] il permanere. dello sviluppo tradizionale della matematica accanto a quello che si proibisce fermamente qualsiasi ricorso al "principio del terzo escluso". Può prendere inoltre definitivamente distanza dalla posizione, già ricordata, che aveva assunto Brouwer nel 1923, il quale rifiutava come non affidabili tutte le conclusioni anche finitarie, ma ottenute con un uso transfinito del "principio del terzo escluso". Infatti una qualsiasi di queste conclusioni può essere considerata vera nel senso abituale, "essa può di fatto essere dimostrata come una conclusione intorno alla pseudoverità, ma nell'ambito del finitario la pseudoverità coincide con la verità ordinaria".[17] Infine, in questo senso, qualsiasi uso si faccia del "principio del terzo escluso", questo non porta mai a contraddizione.

Kolmogorov in questo articolo traccia, anche un'assiomatica incompleta per i quantificatori allo scopo di dimostrare le seguenti formule che regolano il rapporto tra asserzioni universali ed esistenziali: [74]

8) $(\overline{a})\ A\ (a) \rightarrow (Ea)\ \overline{A}\ (a)$
9) $(Ea)\ \mathrm{A}\ (a) \rightarrow (\overline{a})\ A\ (a)$
10) $(\overline{Ea})\ A\ (a) \rightarrow (a)\ \overline{A}\ (a)$
11) $(a)\ \overline{A}\ (a) \rightarrow (\overline{Ea})\ A\ (a)$

intendendo per $(a)\ A\ (a)$ *per tutti gli a A*(*a*) *è vera* e per $(Ea)\ A\ (a)$ *esiste un a per cui A*(*a*) *è vera*.

L'autore mette in risalto come la parte più problematica sia dimostrare la formula 8, cosa che non è possibile senza usare il principio della doppia negazione nella sua formulazione classica. La formula non e valida, infatti, da un punto di vista intuizionista.

Tutto ciò che è stato discusso precedentemente è applicabile, secondo Kolmogorov, alle conclusioni ottenute con l'aiuto di questo principio. Tra le altre cose, adottando 8 e 9, è possibile formulare un principio del terzo escluso per enunciati della forma $(a)\ A\ (a)$, e precisamente:

12) $(a)\ A\ (a) \vee (Ea)\ \overline{A}\ (a)$

[15] Ivi, p. 186.
[16] Ivi, p. 187.
[17] *Ibidem*.

per tutti gli *a*, *A* (*a*) è vera oppure esiste un *a* per cui *A*(*a*) non è vera. [75]

Gli assiomi adottati da Kolmogorov sono i quattro seguenti:

I) $(a)\ (A\ (a) \rightarrow B\ (a)) \rightarrow ((a)\ A\ (a) \rightarrow (a)\ B\ (a))$,
II) $(a)\ (A \rightarrow B\ (a)) \rightarrow (A \rightarrow (a)\ B\ (a))$,
III) $(a)\ (A\ (a) \rightarrow C) \rightarrow ((Ea)\ A\ (a) \rightarrow C)$,
IV) $A\ (a) \rightarrow (Ea)\ A\ (a)$.

Il suo intento non e, dando questi assiomi, quello di costituire un sistema formale della logica predicativa, e lo dichiara esplicitamente. "Crediamo che tutti questi assiomi siano intuitivamente evidenti. La scelta di questi assiomi e il loro numero sono esclusivamente determinati dal nostro scopo, che è quello di dimostrare le formule 8-11".[18]

Per dimostrare la formula 8 però Kolmogorov è costretto a usare anche la formula della doppia negazione. A questi assiomi aggiunge 1a seguente regola: "quando una formula *S* sta per se stessa (in una derivazione), possiamo scrivere la formula (*a*)*S*".[19] Questa rappresenta di fatto la regola di generalizzazione, permettendo di prefissare (*a*) ad ogni formula [76] data.

È interessante notare, come già ha fatto Hao Wang nella prefazione alla traduzione inglese di questo articolo, come Kolmogorov ritenga qui intuitivamente vero anche l'assioma esprimibile come

V) $(a)\ A\ (a) \rightarrow A(t)$.

"Osserviamo, innanzitutto, che avendo determinato il significato del simbolo (*a*) *A* (*a*) come, *per tutti gli a, A (a) è vera*, noi intendiamo con *per tutti gli a* la stessa cosa che si intende con *per ciascun a*: cioè il suo significato è che, qualunque *a* sia data, noi possiamo asserire che A (a) è vera".[20]

Questo, unito ai quattro assiomi I-IV e al principio *P* [vedi p.], rappresenta una soddisfacente assiomatizzazione per i. quantificatori. Ciò è sottolineato, con una certa enfasi, dallo stesso Hao Wang: "Se dunque al sistema *B* noi aggiungiamo la regola esplicitamente stabilita *P* e I-IV più l'assioma V, noi otteniamo un'adeguata assiomatizzazione *BQ* della 1ogica intuizionista che differisce dal sistema di [77] Heyting solo nell'ammissione del discutibile assioma V".[21]

Questo articolo, pur denso di spunti, essendo stato scritto in russo, ebbe la sfortuna di essere conosciuto nel resto dell'Europa solo molto più tardi. Fece il suo ingresso all'interno del dibattito sui principi dell'intuizionismo quando già aveva visto la luce i lavori di Glivenko e di Heyting. Questi, pur proponendo un calcolo per larga parte equivalente a quello di Kolmogorov, ne mostravano definitivamente anche i limiti. L'attenzione di Kolmogorov resta infatti circoscritta al tentativo di delineare una ricostruibilità della logica classica nell'intuizionismo. In questa maniera, tuttavia, il sovietico anticipava larga parte della problematica che, dopo i lavori di Gödel, è conosciuta con il nome di "traduzione negativa".

[18] Ivi, p. 190
[19] Ivi, p. 189.
[20] *Ibidem*.
[21] H. Wang, *Introduzione* alla traduzione inglese di *O principe tertium non datur*, in J. van Heyenhoort, *From Frege to Gödel*, pp. 414-416.

2. *Glivenko e l'illegittimità della proposizione "terza"*

Particolarmente interessante è il contributo che porta Glivenko con due articoli pubblicati tra il 1928 e il [78] 1929 nelle pagine del *Bulletin*. Glivenko si propone un duplice scopo, da un lato portare ad evidenza ciò che di illegittimo vi è nell'approccio che Barzin ed Errera hanno avuto con la logica brouweriana, dall'altro tracciare alcuni punti in direzione di un tentativo volto a gettare le fondamenta di un possibile calcolo logico che sia in sintonia con le idee di Brouwer. Glivenko, infatti, riconosce nel lavoro che hanno svolto i due belgi uno sforzo realmente teso a dare un'interpretazione del contenuto della logica brouweriana. La sua intenzione non è quella di rintracciare difetti tecnici della loro critica, cosa che tra l'altro aveva già fatto Khintchine, ma mostrare come proprio il punto di partenza dal quale si origina, cioè l'introduzione della nozione di "proposizione terza", sia incompatibile con la stessa logica di Brouwer.
"Voglio mostrare che nella logica brouweriana l'introduzione di una proposizione terza è altrettanto illegittima che nella logica classica, così che la logica brouweriana non è per niente una logica tripartita".[22] [79] Nel primo di questi due articoli Glivenko, avendo di mira per lo più questo obiettivo, si limita a tracciare alcuni risultati fondamentali per un'interpretazione della logica di Brouwer, senza tentare ancora di connetterli all'interno di un insieme di relazioni più generali intrattenute con la logica classica. Egli mostra come, servendosi di principi conosciuti della logica che mantengono il loro valore in quella brouweriana, sia possibile ottenere la dimostrazione di alcuni teoremi che servono a far luce sul rapporto che questa mantiene con il "principio del terzo escluso".

Elenca dunque dieci assiomi (servendosi anche lui delle notazioni tratte da Russell e Whitehead). Questi sono:

I. $p \to p$
II. $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

[22] V. Glivenko, *Sur la logique de M. Brouwer*, in "Acad. Roy. De Belg. Bull. De la Cl. De Sc." (5), vol, 14, 1928, pp. 225-228.

Questi due assiomi si riferiscono all'implicazione, ma come sottolinea lo stesso Glivenko non ne regolano completamente il comportamento. Ve ne sono poi tre che definiscono il prodotto logico:

III. $pq \rightarrow p$
IV. $pq \rightarrow q$ 80
V. $(r \rightarrow p) \rightarrow ((r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow pq))$

e tre che definiscono la somma:

VI. $p \rightarrow p \vee q$
VII. $q \rightarrow p \vee q$
VIII. $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$.

L'ultimo valido per la logica brouweriana riguarda la negazione, con la precisazione che si intende per negazione di una proposizione ($\sim p$) sempre la sua falsità:

IX. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim p)$.

Il decimo è il principio del terzo escluso:

X. $p \vee \sim p$.

È inoltre possibile dedurre da I-IX anche i seguenti due principi detti di opposizione

XI. $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$
XII. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

Non occorre dunque porli come assiomi, ma gli saranno ugualmente utili per le dimostrazioni che seguiranno.
Il rifiuto del "principio del terzo escluso" è ridisegnato secondo delle coordinate che non permettono più 81 un semplice ampliamento di questo con l'introduzione della nozione di "terzo". Così facendo infatti si riformulava su una nuova base lo stesso principio con in più lo svantaggio, per la nuova logica, di perdere qualsiasi possibilità di riferimento al vecchio principio.

Glivenko, invece, evidenzia una serie complessa di relazioni. Innanzitutto, questo è ciò che asserisce il primo teorema: vale in logica brouweriana la falsità della falsità del principio in questione.

I TEOREMA - *Nella logica brouweriana la proposizione "la proposizione $\sim p \vee p$ è falsa" è falsa.*

$\vdash_B \sim(\sim(\sim p \vee p)$.[23]

Questo teorema era già stato enunciato da Brouwer nello *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung* nel 1925, così come anche il seguente:

---

[23] Ivi, p. 226.

II TEOREMA - *Nella logica brouweriana la falsità della falsità della falsità di una proposizione q implica la falsità della proposizione q.*[24]

$\vdash_B \sim\sim\sim q \rightarrow \sim q.$ 82

Inoltre se la falsità di una certa proposizione consegue dal principio del terzo escluso, questa stessa falsità continua a valere anche in logica brouweriana:

III TEOREMA - *Nella logica brouweriana la proposizione "la proposizione ¬ p ∨ p implica la falsità della proposizione q" implica la falsità della proposizione q.*[25]

$\vdash_B ((\sim p \vee p) \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim q.$

Con l'introduzione di questo teorema è possibile adesso mostrare come, se accettiamo questa interpretazione del rifiuto del "principio del terzo escluso", sia impossibile introdurre una nozione di stato terzo di una proposizione all'interno della logica brouweriana. Infatti, una volta che si è introdotto come contrapposto sia alla falsità che alla verità, varrà per lo stato terzo una coppia condizione e cioè che, se una proposizione è falsa questa non potrà essere anche terza e analogamente se una proposizione è vera. In entrambi i casi la sua terzità sarà dunque falsa. Avremo allora

$\sim p \rightarrow \sim p'$ e $p \rightarrow \sim p'$.

Inoltre per VIII otteniamo 83

$(\sim p \rightarrow \sim p') \rightarrow ((p \rightarrow \sim p') \rightarrow (\sim p \vee p \rightarrow \sim p'))$

e quindi

$\sim p \vee p \rightarrow \sim p$

e per il teorema, precedente

$\sim p'$.

IV TEOREMA - *Nella logica brouweriana la proposizione "una proposizione p è terza" è falsa.*[26]

Ma è solo con l'articolo successivo che Glivenko allarga l'orizzonte del proprio obiettivo fino a intravedere la possibilità di "gettare 'le fondamenta complete di un calcolo"[27] per la logica brouweriana. Ripropone così i nove assiomi dei quali si era servito per le dimostrazioni apparse nell'articolo precedente e ne aggiunge quattro nuovi. Due di essi, che si ammettono senza particolari problemi permettono rispettivamente di ottenere la permutazione dell'ordine delle premesse

---

[24] Ivi, p. 227.
[25] Ivi, p. 228. [Nota di AS. Questa è una tesi classica non intuizionista.]
[26] Ivi, p. 229.
[27] V. Glivenko, *Sur quelques points de la logique de M. Brouwer*, in "Acad. Roy. de Belg. Bull. de la Cl. des Sc." (5) vol 152, 19296, pp. 183-188.

A. $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r))$

e l'eliminazione di una premessa implicata due volte

B. $(p \rightarrow (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ [84]

Occorre inoltre precisare ulteriormente il valore formale che assume l'implicazione. Infatti questa non risulta sufficientemente definita dai primi nove assiomi. Vi aggiunge allora il principio dell'*a fortiori*. Questo afferma che se una proposizione è vera in assoluto, resterà vera sotto qualsiasi condizione:

C. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$.

Il sistema diventa adesso ridondante. Infatti aggiungendo B e C, A diventa superfluo, come del resto anche $p \rightarrow p$. Infine aggiunge una delle leggi che prendono nome da Duns Scoto, cioè quella che stabilisce che, dalla falsità di una proposizione può essere inferita qualsiasi cosa

D. $\sim q \rightarrow (q \rightarrow p)$.

Prima dell'aggiunta di questo principio, quella a cui stava giungendo Glivenko era una logica ridondante minimale; adesso, con questo suggerimento di Heyting diventa una logica intuizionista vera e propria limitata alla parte proposizionale e che risente solo di [85] alcuni problemi di ridondanza. Troelstra fa notare a questo proposito come rispetto al sistema dell'olandese, a quello di Glivenko manchi tuttavia la capacità di derivare la "doppia negazione del principio del terzo escluso" ovvero $\sim\sim(\sim p \vee p)$.[28] L'opportunità dell'aggiunta di. questi due principi gli è stata suggerita da Heyting.

Glivenko mostra come grazie a VI e VII essi non siano altro che una semplice conseguenza del principio [di Filone]

$(p \vee \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

che ritiene facilmente accettabile.

L'interpretazione dell'implicazione che vi sottostà è molto semplice: "la conseguenza formale *p* di *q* non ha altro senso che: *se si accetta la verità di p, allora si deve accettare quella di q*".[29]

Ciò non comporta nessuna difficoltà. Una possibile [86] obiezione, che però Glivenko preferisce solo accennare brevemente, potrebbe invece colpire la definizione stessa di una somma logica. È importante sottolineare come questo sistema risulti completo per la logica classica con la semplice aggiunta del principio del terzo escluso. "Ora c'è da notare che, se si aggiunge il "principio del terzo escluso", si ottiene un sistema completo della logica classica proposizionale; di modo che tutte le espressioni della logica classica proposizionale riconosciute vere possono essere dedotte dai tredici

[28] Vogliamo sottolineare come in questo sistema Glivenko esprima già tutti e quattro i connettivi (come farà più tardi anche Heyting) rispettando anche questo tratto della logica intuizionista.

[29] Ivi, p. 185.

assiomi I – IX e A – D e dall'assioma $p \vee \sim p$ con l'aiuto di due regole conosciute di formazione di catene logiche".[30]

Queste due regole sono la "regola di sostituzione" e la "regola di separazione o conclusione" che è espressa dallo schema:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathcal{P}\\ \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}\end{array}}{\mathcal{Q}}$$

Si tratta adesso di precisare in che senso possiamo ritenere completo per la logica brouweriana il sistema descritto. È possibile evidenziarlo tracciando [87] due relazioni fondamentali tra le proposizioni dimostrabili nella logica classica e quelle che lo sono in logica brouweriana. Innanzitutto: "*Se una certa espressione della logica proposizionale è dimostrabile nella logica classica. allora è la falsità della falsità di questa espressione che è dimostrabile nella logica brouweriana*".[31]

Per dimostrare questa proposizione. Glivenko mostra per prima cosa come la falsità della falsità valga per ciascuna delle espressioni I-IX e A-D. Ciò è dimostrabile facilmente in quanto si ottiene da I e XI la formula: $p \rightarrow \sim\sim p$. Infatti:

I. $\sim p \rightarrow \sim p$.
XI. $\underline{(\sim p \rightarrow \sim p) \rightarrow p \rightarrow \sim\sim p}$
$p \rightarrow \sim\sim p$

Inoltre per il teorema I, dimostrato precedentemente da Glivenko abbiamo la falsità della falsità del "principio del terzo escluso". Quindi non resta che mostrare come le regole di inferenza mantengano questa stessa [88] proprietà. La parte problematica di questa dimostrazione, che non presentiamo qui, riguarda la "regola di separazione" e precisamente la verifica dello schema

$$\frac{\begin{array}{c}\sim\sim\mathcal{P}\\ \sim\sim(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q})\end{array}}{\sim\sim\mathcal{Q}}$$

La seconda relazione è quella che si rappresenta nella proposizione seguente: "*Se la falsità di una certa espressione della logica proposizionale è dimostrabile nella logica classica questa stessa falsità è dimostrabile nella logica brouweriana*".[32] Anche la dimostrazione di questa asserzione non comporta particolari problemi. Infatti, supponiamo di aver dimostrato nella logica classica la falsità di una qualsiasi proposizione $\mathcal{P}$. Avremo dunque $\sim\mathcal{P}$. Per la relazione che abbiamo appena dimostrato, nella logica brouweriana avremmo allora $\sim\sim\sim\mathcal{P}$. Dunque, poiché per il teorema II vale $\sim\sim\sim\mathcal{P} \rightarrow \sim\mathcal{P}$, otteniamo $\sim\mathcal{P}$ anche in questa. [89]

---

[30] Ivi, p. 285.
[31] Ivi, p. 183
[32] *Ibidem*.

Al di là della portata di questi due risultati specifici ai quali giunge Glivenko, ci sembra particolarmente importante come nel rapporto tra la logica chiamata brouweriana e quella classica non si veda più solamente un'opposizione tra due atteggiamenti all'interno della quale il matematico deve già *a priori* disporsi. Gli spunti problematici contenuti nel pensiero di Brouwer cominciano ad evidenziarsi come oggetto interessante di studio per il matematico e anche per il logico.

Questo di Glivenko è un primo abbozzo di composizione di un vero e proprio sistema formale per la logica che si ispira a questo pensiero. Lo stesso Heyting infatti spesso parla della sua formalizzazione come di una continuazione di questo lavoro, indirizzato soprattutto a un ulteriore approfondimento, che qui appare solo a tratti, del significato che assumono di volta in volta i termini impiegati a questo scopo. Se si eccettua il lavoro di Kolmogorov che è, come abbiamo visto, di estrema importanza, ma che rimane isolato e sconosciuto [90] per un lungo periodo, questo di Glivenko è il primo contributo che segna una tappa in questo cammino. Contributo di estrema rilevanza in quanto, a parte alcuni problemi di ridondanza, è proprio il sistema entrato successivamente nell'uso per il caso proposizionale dell'intuizionismo. Heyting in un certo censo non dovrà fare altro che renderlo più elegante ed estenderlo alla parte che si riferisce ai quantificatori. Il dibattito intorno all'intuizionismo compie con questo lavoro una svolta definitiva.

3. *Il calcolo di A. Heyting*

Nel 1930 in *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* vengono pubblicati gli articoli di Heyting *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik* e *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik* I e II. Questi rappresentano non solo il contributo più incisivo di quegli anni verso la formalizzazione [91] della logica e della matematica intuizionista, ma soprattutto la spinta più decisiva al dibattito che stava cominciando a prendere campo intorno a queste. Come conseguenza principale hanno infatti quella di far converger sulla teoria intuizionista l'attenzione di autori che fino a quel momento avevano guardato solo con diffidenza verso i primi tentativi di teorizzazione sull'argomento e che in generale non ne condividevano le basi filosofiche.

Questi articoli sono un ampliamento e una rielaborazione del lavoro che Heyting aveva presentato nel 1928 e con il quale aveva ottenuto una borsa di studio messa in palio, su suggerimento di Mannoury, l'anno precedente dalla "Società Matematica Olandese". Per concorrere si richiedeva una formalizzazione della teoria degli insiemi di Brouwer, si doveva inoltre indicare i punti in cui eventualmente se ne prendeva le distanze e, infine, indagare sulla possibilità di costruire da questa formalizzazione il "principio di non contraddizione" e quello, del "terzo escluso" [92] Fu proprio di Brouwer la proposta di ripristinare e ampliare questo saggio in vista di una possibile pubblicazione, che poi non ebbe luogo, sui *Mathematische Annalen*. "Il suo manoscritto mi ha interessato straordinariamente (...) io ho imparato ad apprezzare il suo lavoro così tanto che mi piacerebbe chiederle di rilavorarci e di riscriverlo in tedesco (preferibilmente con più dettagli.[33]

[33] Lettera di Brouwer a Heyting del 17.7.1928 cit. In A.S. Troelstra, *Arend Heyting and his Contribution to Intuitionism*, in "Nieuw Archief voor Wiskunde" (3), XXIX, 1981, pp. 1-23.

Prima però di analizzare più da vicino questi articoli, e in particolare il primo che si riferisce esplicitamente alla formalizzazione della logica proposizionale intuizionista, vorremmo soffermarci brevemente sull'atteggiamento generale di Heyting nei confronti dell'intuizionismo, che riteniamo determinante al fine di una comprensione del suo lavoro. Gli sforzi di Heyting sono infatti continuamente tesi a far sì che l'intuizionismo, come aveva preso forma nel pensiero di Brouwer, non finisse per essere dimenticato o considerato solo come una stravagante deviazione. [93] Tuttavia nelle sue esposizioni dell'intuizionismo non si spinge mai a presentarlo come l'unico tipo corretto di matematica. D'altronde possiamo ammettere che per lui non si tratti in primo luogo di convincere qualcuno ad abbracciare un'intera dottrina filosofica, ma di presentare un oggetto interessante di studio mantenendolo tale. Inoltre Heyting non condivide la visione pessimistica della comunicazione, che accompagna invece gli scritti di Brouwer e ritiene la comprensione tra matematici essenziale. La matematica intuizionista consiste nell'attività mentale di costruzione dei sistemi matematici e senza questa costruzione nessuna formula vi può trovare posto: "Personalmente io sono attratto dalla matematica costruttiva, perché sono incapace di dare un senso intelligibile all'asserzione che un oggetto matematico che non sia stato costruito esiste.[34]

Ma se dunque simboli e formule possono servire solamente [94] come supporto per la memoria e la comunicazione, questo servizio, seppure limitato, ha un suo valore: "La matematica intuizionista è meglio capita come fenomeno culturale, dove il linguaggio gioca un importante, sebbene non decisivo, ruolo".[35] A.S.Troelstra in un saggio pubblicato recentemente sottolinea 1'importanza che, a questo proposito, ha l'influenza di Gerrit Mannoury sull'atteggiamento di Heyting. Mannoury era stato in Olanda il primo ad introdurre lo studio della logica e della filosofia della scienza all'università. Condivide con Brouwer, che era stato anche suo allievo, una forte consapevolezza dei limiti del linguaggio come mezzo di comunicazione; Per lui la matematica è essenzialmente "un fenomeno di vita" e non può essere considerata una verità indipendente dagli uomini e dalle intenzioni umane. La matematica formale e quella intuizionista si distinguono per Mannoury in quanto la prima rappresenta la "forma del fenomeno matematico" e dunque la sua natura [95] è completamente linguistica, mentre la seconda rappresenta la "forma del pensiero matematico" ed è linguistica solo in piccola parte. In ogni caso anche l'intuizionismo contiene elementi formali linguistici. L'indagine matematica deve prendere origine dalla questione dei fondamenti e prediligere l'investigazione psicologica. Le considerazioni dì tipo assiomatico possono seguire solo in un secondo tempo. "Il problema matematico, anche il più astratto, non può essere formulato senza implicare l'Adamo vivente, che dà un nome alle cose del suo spirito con la volontà di dominarle. E il dogma più astratto include tra le sue premesse questa stessa cosa dello spirito e questa stessa volontà".[36]

---

[34] A. Heyting, "Some remarks on intuitionism", in *Constructivity in Mathematics. Proceedings Colloquium Amsterdam 1957*, North Holland Pubblioshing Company, Amsterdam 1959, pp. 69-71.
[35] A. Heyting, *Taal en teken in de wiskunde*, "Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbegeerte en Psychologie", 40, 1947-1948, pp. 106-118, cit. in A.S. Troelstra, "Logic in the writings of Brouwer and Heyting", in *Atti del convegno internazionale di storia della logica*, S. Gimignano, 4-8 dicembre 1982, a cura di V.M. Abrusci, E. Casari e M. Mugnai.
[36] Citato in A. Heyting, *Les fondants des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration*, Gauthier Villars, Paris-Louvain, iv, +9-2, p, 66.

In Mannoury però questa concezione è accompagnata costantemente da un interesse verso il linguaggio come mezzo di comunicazione e verso l'eventuale possibilità di incrementare la comprensione tra matematici. A questo scopo distingue le componenti volitive (emozionali) e quelle denotanti del linguaggio. Un incremento [96] delle seconde a scapito delle prime può rappresentare un valido aiuto in tal senso.

Se assumiamo, dunque, l'assiomatizzazione formale, in questa ottica essa è perfettamente legittima, anche se non dobbiamo dimenticare che comunque sia resterà sempre inappropriata come traduzione delle nostre esperienze interiori. La posizione di Heyting si colloca così tra Brouwer e Mannoury. Troelstra ricorda, come lo stesso Mannoury in una lettera a Heyting del 1949 gli avesse dichiarato apertamente di avvertire questa stretta vicinanza tanto da pensare che ogni differenza tra le loro opinioni si riducesse a un differente uso linguistico. Inoltre Heyting stesso nel 1947 prende in parte le distanze dalla visione di Brouwer della matematica come compiuta nella mente del matematico e non è forse un caso che abbia continuato a ritenere controversa l'ammissione della teoria del soggetto creativo di Brouwer ovvero del matematico idealizzato, punto in cui si motiva particolarmente il distacco drastico dall'uso di qualsiasi [97] simbolismo. "L'intuizionista cerca l'esattezza non nel linguaggio matematico ma nel pensiero matematico stesso. Tuttavia mi sembra che l'opinione che la matematica intuizionista esista nella sua forma pura solo nell'idea di un certo matematico idealizzato e che il linguaggio non rappresenti altro che una connessione molto vaga tra queste costruzioni mentali, per altro indipendenti, sia in conflitto con la realtà. Infatti differenti matematici si influenzano l'uno con l'altro e si capiscono fra di loro troppo bene".[37]

Non per questo Heyting perde mai di vista i limiti che la prospettiva intuizionista impone a un tentativo di tradurre parti essenziali della matematica in un linguaggio formale. Sappiamo inoltre che. Heyting non riuscì mai a spiegarsi fino in fondo il successo particolare che ebbero questi suoi articoli, e si dispiaceva di essere ricordato anche dopo molti anni soprattutto come l'autore della formalizzazione intuizionista. "Mi dispiace che il mio nome oggi sia conosciuto [98] principalmente in rapporto a questi articoli, che erano molto imperfetti e contenevano molti errori. Essi furono di poco aiuto nella battaglia alla quale ho dedicato la mia vita, cioè una migliore comprensione e apprezzamento delle idee di Brouwer. Essi allontanarono l'attenzione dall'idee sottostanti al sistema formale stesso".[38]

Heyting è dell'idea che troppo spesso si sia finito per pensare, a dispetto delle indicazioni che lui stesso aveva dato in quegli articoli, che un sistema formale potesse rappresentare una descrizione totale dell'intuizionismo. In effetti molti dei lavori che presero origine e spunto da quello di Heyting finirono per seguire percorsi nei quali si perdeva qualsiasi connessione diretta con questo, anche se, malgrado ciò, a volte si arricchiva notevolmente la conoscenza dei concetti intuizionisti. Heyting aveva dato la possibilità a tutti i matematici di vedere nel pensiero intuizionista un oggetto interessante di studio che era avvicinabile con mezzi concettuali fino ad allora ritenuti [99] inadeguati.

---

[37] A. Heyting,*Taal en teken in de wiskunde*, cit. pp. 121-131.

[38] A. Heyting, *History of the Foundation of Mathematics,* in "Nieuw Archief voor Wiskunde", (3), 26, pp. 1-21

Era dunque inevitabile che per larghi tratti diventasse imprevedibile la direzione lungo la quale si sarebbe sviluppata la ricerca. Pensiamo che anche Brouwer avvertisse l'influsso che avrebbe potuto avere un lavoro simile per la sopravivenza del suo pensiero all'interno del dibattito matematico. Se per un verso, infatti, non incoraggiò mai Heyting più di tanto su questa strada, per lui priva di qualsiasi attrattiva, non abbiamo nessuna testimonianza di ostilità nei confronti di questo lavoro che vada oltre una certa diffidenza. D'altro canto una diffidenza di fondo è motivata proprio dal prezzo che una tale propaganda avrebbe pagato: il formalismo si rendeva in parte autonomo dalle posizioni di colui che aveva dato forma ai principi fondamentali dell'intuizionismo. Heyting da parte sua non aveva, lasciato nessuna possibilità di dubbio sull'obiettivo che si poneva: "La matematica intuizionista è un'attività mentale e [100] per essa ogni linguaggio, anche quello formale, è soltanto un mezzo di comunicazione. È per principio impossibile fissare un sistema di formule che sia equivalente alla matematica intuizionista, dato che le possibilità del pensiero non si lasciano ridurre a un numero finito di regole compilabili in anticipo. Perciò il tentativo di tradurre le parti essenziali della matematica in linguaggio formale diventa legittimo soltanto in presenza della maggiore concisione e determinatezza di quest'ultimo rispetto al linguaggio comune; proprietà, queste, che lo rendono adatto ad agevolare la penetrazione dei concetti intuizionisti e il loro uso nelle ricerche."[39]
Così facendo infatti si viene a creare una specie di omogeneizzazione con l'impostazione classica che facilita la possibilità di ricerca per ognuno nei confronti delle idee intuizioniste. Queste diventano motivo di interesse anche e soprattutto per il matematico classico. L'intuizionista dal canto suo infatti non può ritenere che i contrasti e le connessioni che emergono [101] dall'accostamento dei due sistemi formali rendano automaticamente e autenticamente quello che è il rapporto tra le due matematiche, poiché per questo accostamento già è stato scelto il piano della logica formale, che è esso stesso elemento di contrasto. Nello stesso tempo però il sistema fornito da Heyting dette a tutti la forte sensazione che vi si rispettasse profondamente quelli che erano i presupposti fondamentali dell'intuizionismo. Inoltre, storicamente, questo sistema faceva la sua apparizione in un momento in cui si era creata una particolare predisposizione ad accogliere positivamente un tentativo di tal genere. Infatti, tra il disinteresse e il rifiuto drastico da parte di molti matematici classici, tra le polemiche e le prime nebulose discussioni, che pure rappresentano un vero e proprio contributo verso una maggiore chiarificazione dei concetti intuizionisti, ma che evidenziano la facilità con la quale il pensiero intuizionista si prestava al fraintendimento, questo lavoro risponde a un'esigenza avvertita diffusamente. [102] È forse per questo che al lavoro di Heyting seguono numerose interpretazioni da dare a questi sistemi formali perché siano intuizionisticamente sensati. L'atteggiamento nei confronti dell'assiomatizzazione tende, infatti, a mutare e si nota sempre più frequentemente il valore che la sua funzione descrittiva mantiene per l'intuizionismo.

Il punto di partenza per la formalizzazione di Heyting del 1930 è il calcolo proposizionale dei *Principia_Mathematica*. In una lettera ad Oscar Becker, alla domanda su come fosse giunto alla sua formalizzazione, Heyting rispondeva: "Ho ricavato gli assiomi e le proposizioni dai *Principia Mathematica* e ne ho fatto un

[39] A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, in "Sitzungberichte der preussischen Akademie von Wissenschaften", Physikalisch-mathematische Klasse, p. 42-56.

sistema di assiomi indipendenti. La completezza del mio sistema è assicurata nel miglior modo dalla relativa completezza dei *Principia*".[40] Come sottolinea anche Troelstra, questa però non era un'operazione semplice ed era possibile solo per chi almeno implicitamente aveva un'idea ben chiara intorno ai significato che assumevano intuizionisticamente gli [103] operatori logici. D'altronde Heyting avverte: "Un linguaggio che fosse costruito seguendo passo passo l'andamento della matematica intuizionista sarebbe in ogni sua parte così diverso dalla forma usuale che finirebbe con il perdere di nuovo completamente le proprietà positive di cui abbiamo parlato prima".[41]

Heyting distingue il caso in cui si pensi al sistema formale in se stesso da quello in cui vi si associ viceversa immediatamente un'interpretazione. In quest'ultimo caso ogni formula, se l'interpretazione è adeguata, rappresenta un'espressione matematica corretta. Il sistema è così immediatamente al riparo da contraddizioni. Nell'altro caso, viceversa, anche la contraddizione è definita come una determinata formula. Questo è il caso meno interessante per l'intuizionista, ma è a partire da ciò che è possibile formulare qualche considerazione intorno alla completezza e all'indipendenza del sistema assiomatico.

Heyting si interessa subito del problema della completezza e riserva, invece, un posto in appendice alla [104] dimostrazione di indipendenza degli assiomi che costituiscono il suo calcolo proposizionale. Possiamo intendere tradizionalmente una completezza proposizionale "in senso stretto" (sintattico) e una "in senso largo" (semantico). Heyting mostra che in nessuno di questi due casi possiamo attribuire l'esistenza di una completezza per il suo sistema formale. Nel primo caso, infatti, gli verrebbe richiesta l'impossibilità di aggiungere una qualsiasi formula che non è derivabile fino a quel momento, pena la derivabilità nel sistema di qualunque formula, cioè la sua inconsistenza. Ciò non è possibile perché, come vedremo, possiamo sempre aggiungere al suo sistema ancora la formula $\neg\neg a \rightarrow a$ (se la proposizione *a* non può essere falsa, allora *a* è vera). Nel secondo caso si fa riferimento all'interpretazione matematica del sistema e si richiede che ogni formula che rappresenta una relazione vera tra proposizioni possa venire derivata dagli assiomi. Questo tipo di completezza è incompatibile con le basi della teoria [105] intuizionista. Si può parlare in un certo modo di completezza per il sistema intuizionista, secondo Heyting, solo nella prospettiva indicata da Glivenko nell'articolo già esaminato del 1929, ovvero nel senso delle seguenti proprietà:

1. Se la proposizione *a* è dimostrabile in logica classica, allora nel nostro sistema è dimostrabile la proposizione "*a* non può essere falsa".
2. Se la proposizione "*a* è falsa" è dimostrabile in logica classica, allora essa è dimostrabile anche nel nostro sistema.

Passando a illustrare il calcolo proposizionale che vuole proporre, Heyting introduce subito "quattro concetti fondamentali" ognuno presentato immediatamente come irriducibile agli altri tre. È questa, come abbiamo già detto, una prima sostanziale differenza dal sistema di Kolmogorov, che comunque Heyting all'epoca non conosceva. Per l'olandese questo è un primo punto in cui la formalizzazione della logica intuizionista si distacca drasticamente da quella tradizionale. [106]

Questi sono:

---

[40] Lettera di A. Heyting a Oscar Becker del 23.7.1933, cit. in A.S. Troelstra, *Arend Heyting and his contribution to intuitionism*, cit., p. 16.
[41] A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, cit., p. 195.

$a \rightarrow b$ ("da a segue b")
$a \wedge b$ ("a e b")
$a \vee b$ ("a oppure b")
$\neg a$ ("non a")

Quest'ultimo simbolo è diverso da quello usato per la formalizzazione di Russell e Whitehead in quanto proprio gli assiomi e le formule relative alla negazione si allontanano particolarmente da quelle della teoria classica.

Per Heyting la sensazione che il motivo più consistente del conflitto tra formalisti e intuizionisti si snodi intorno all'interpretazione della negazione non si cancella neanche tenendo conto dell'indicazioni che emergono dalla nota di Glivenko. Ciò che per Heyting si evidenzia sempre più è casomai l'inadeguatezza del formalismo a dar corpo e voce agli elementi più autentici e fondamentali di contrasto. D'altra parte a questo proposito ancora nel 1959 si esprimeva i questi termini: 107 "Il suo oggetto di studio (dell'intuizionismo), il pensiero matematico costruttivo, determina univocamente le sue premesse e lo pone accanto, non all'interno, della matematica classica, la quale studia un altro argomento, qualunque esso sia. Per questo motivo non si può sperare di stabilire un accordo tra formalismo e intuizionismo, attraverso la formalizzazione della matematica intuizionista".[42]

$a \rightarrow b$ è interpretata come "se a vale, vale anche b"; nel caso in cui a e b contengano variabili ciò che viene asserito è: "se per una determinata sostituzione delle variabili vale a, per la stessa sostituzione vale anche b". Occorre per Heyting considerare il caso in cui, una volta che si sia dimostrata in questo senso la proposizione $a \rightarrow b$, in un secondo tempo risulti che b è sempre vera o che a è sempre falsa. Se una formula implicativa è stata accettata deve mantenere la sua validità. "Ciò significa che dobbiamo attribuire al segno $\rightarrow$ un significato tale che $a \rightarrow b$ continui a valere anche adesso".[43] 108 Partendo da questa interpretazione dell'implicazione, dalla quale prenderà più tardi le distanze Johansson nel formulare il suo "calcolo minimale", Heyting può includere fra i suoi assiomi per il connettivo $\rightarrow$

$$\vdash\vdash b \rightarrow (a \rightarrow b),$$

e per $\neg$ quella legge di Duns Scoto che Kolmogorov aveva apertamente respinto:

$$\vdash\vdash \neg a \rightarrow (a \rightarrow b).$$

Abbiamo già visto inoltre come al contrario Glivenko avesse accolto totalmente questa interpretazione. L'accettazione di questo assioma resta in parte controversa anche per lo stesso Heyting, che spesso torna a giustificare la sua mancanza di immediata evidenza intuitiva.

Vediamo adesso più da vicino quali sono le regole e gli assiomi che costituiscono il calcolo di Heyting. È nostra intenzione soffermarci brevemente solo sulla parte dedicata al connettivo $\neg$, che l'autore stesso indica come la più problematica. Innanzitutto, introduce sei regole di operazioni:[44] 109

[42] A. Heyting, *Some remarks on intuitionism*, cit., pp. 69-70.
[43] A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, cit., pp. 197-198.
[44] Ivi, pp. 198-199.

1.1. Per indicare che una formula è messa nella lista delle "formule valide" le verrà preposto il segno $\vdash$. Se la formula è un assioma, cioè se viene ad arbitrio accettata come valida, lo si indicherà raddoppiando il segno $\vdash$.

1.2 Se a e b sono formule valide anche $a \wedge b$ è una formula valida.

1.3 Se a e $a \rightarrow b$ sono formule valide, anche b è una formula valida.

1.4 La formula *cost.a* significa che il segno a è una costante. Ogni segno che non venga introdotto in questo modo come costante è una variabile.

1.5 $(p/x)a$ è la formula che risulta dalla formula a quando si sostituisce dappertutto la variabile x (se compare in a) con la combinazione di segni p.

1.6 La formula $a =_D b$. indica una definizione; significa che da una formula valida, si ottiene ancora una formula valida se la combinazione di segni a viene sostituita con la combinazione di segni b, anche quando la sostituzione non ha luogo ovunque simultaneamente. [110]

Per la suddivisione delle formule al posto delle parentesi vengono usati dei punti. I primi sei assiomi si riferiscono all'implicazione e alla congiunzione:

Cost. . , : , :. , :: , $\rightarrow$, $\wedge$, $\leftrightarrow$, (,) , $=_D$

2.1 $\vdash\vdash .a \rightarrow a \wedge a.$

2. 11 $\vdash\vdash .a \wedge b \rightarrow b \wedge a.$

2.12 $\vdash\vdash .a \rightarrow b. \rightarrow .a \wedge c \rightarrow b \wedge c.$

2.13. $\vdash\vdash .a \rightarrow b. \wedge .b \rightarrow c. \rightarrow .a \rightarrow c.$

2.14 $\vdash\vdash .b \rightarrow .a \rightarrow b.$

2.15 $\vdash\vdash .a \wedge .a \rightarrow b. \rightarrow b.$

Seguono poi tre assiomi per la disgiunzione:

Cost. $\vee$

3.1 $\vdash\vdash .a \rightarrow a \vee b.$

3.11 $\vdash\vdash .a \vee b \rightarrow b \vee a.$

3.12 $\vdash\vdash .a \rightarrow c. \wedge .b \rightarrow c. \rightarrow .a \vee b \rightarrow c.$

Per quanto riguarda questi connettivi non è possibile evidenziare immediatamente una differenza apprezzabile con la teoria classica.[45] [111]

Gli assiomi che si riferiscono alla teoria classica sono due:

Cost. $\neg$

4.1 $\vdash\vdash .\neg a \rightarrow .a \rightarrow b.$

4.11 $\vdash\vdash .a \rightarrow b. \wedge .a \rightarrow \neg b. \rightarrow \neg a.$

Heyting stabilisce anche una serie di teoremi validi all'interno del suo calcolo. Può essere interessante elencarne alcuni che si riferiscono alla negazione. Vi appare la legge di contrapposizione nelle sue forme "debole" e "minimale":

---

[45] Anche l'assiomatica per i primi tre connettivi non corrisponde alla teoria classica, ma, se vi aggiungiamo la negazione forte con il "principio del terzo escluso", allora il sistema risulta equivalente a quello classico. Occorre tuttavia notare che manca anche la legge di Peirce: [$.a \rightarrow b. \rightarrow a. \rightarrow a.$che è una legge classica non intuizionista. Nota di AS.]

4.2 $\vdash .a \rightarrow b. \rightarrow .\neg b \rightarrow \neg a.$
4.21 $\vdash .a \rightarrow \neg b. \rightarrow .b \rightarrow \neg a.$

Anche per ciò che concerne la “legge della doppia negazione” vale solamente la sua versione “debole”:

4.3 $\vdash .a \rightarrow \neg\neg a.$

mentre non vale naturalmente: $\vdash .\neg\neg a \rightarrow a.$

Tuttavia in una sezione dedicata esplicitamente alla doppia negazione, come caso particolare di un altro teorema e cioè:

4.42 $\vdash .a \vee b. \wedge \neg a. \rightarrow b.$

è introdotta la formula: [112]

4.45 $\vdash .a \vee \neg a. \rightarrow .\neg\neg a \rightarrow a.$

che asserisce: *se per una data proposizione matematica* a *vale la “legge del terzo escluso” allora per* a *vale la “legge di reciprocità” della specie complementare*. Questo teorema, avverte Heyting, non è però invertibile.

Vale inoltre l’assurdità dell’assurdità del “principio del terzo escluso”, teorema questo dovuto a Brouwer:

4.8 $\vdash .\neg\neg(a \vee \neg a).$

e per la doppia negazione:

4.81 $\vdash .\neg\neg(\neg\neg a \rightarrow a).$

Inoltre, se con la “legge del terzo escluso” si dimostra un particolare teorema, qui possiamo dimostrare sempre la sua doppia negazione:

4.82 $\vdash .a \vee \neg a. \rightarrow b. \rightarrow .\neg\neg b.$[46]

Infine, questa legge la possiamo sempre utilizzare per la dimostrazione di un teorema negativo. È ciò che asserisce:

4.83 $\vdash .a \vee \neg a \rightarrow \neg\, b. \rightarrow \neg b.$[47]

Questo teorema, abbiamo visto, era stato formulato da [113] Glivenko che ne aveva dato anche la dimostrazione.

---

[46] [Nota di AS. Questa è una tesi classica non intuizionista. Probabilmente si tratta di una svista di Heyting. Intuizionisticamente vale $\vdash .a \vee \neg a. \rightarrow .b \rightarrow \neg\neg b.$]

[47] [Nota di AS. Cfr. p. 82. Questa è una tesi classica non intuizionista. Heyting copia l’errore di Glivenko.]

In appendice Heyting dimostra l'indipendenza degli assiomi appena forniti attraverso la procedura indicata da Bernays in *Axiomatische Untersuchung des Aussagenkalkuls der "Principia Mathematica"* del 1926: "$\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ sono concepiti come modi di composizione in un gruppo, $\neg$ è concepito cone funzione nel gruppo. Con ciò ogni formula riceve un determinato valore quando alle variabili vengono sostituiti elementi del gruppo".[48]

In ognuno dei gruppi di assiomi costruiti valgono sempre tutti gli assiomi meno uno. Costruisce poi un dodicesimo gruppo in cui valgono invece tutti gli assiomi mentre non vale $\vdash \neg\neg a \rightarrow a$. In questo gruppo è possibile dare un'interpretazione per cui 0 indica una proposizione vera, 1 una falsa, 2 una la cui verità non è dimostrata senza essere però falsa. Si danno allora, le seguenti tabelle di composizione (il primo elemento sta in alto il [114] il secondo a sinistra):

$\rightarrow$	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	1
2	2	0	0

$\wedge$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	1
2	2	1	2

$\vee$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

$\neg$	0	1	2
	1	0	1

Possiamo verificare come tutti gli assiomi risultino veri (portano a 0). Per quanto riguarda $\vdash \neg\neg a \rightarrow a$, abbiamo:

$$\neg\neg 2 \rightarrow 2 = \neg 1 \rightarrow 2 = 0 \rightarrow 2 = 2$$

Attraverso 4.45 così Heyting può ottenere anche il teorema che asserisce l'inderivabilità del "principio del terzo escluso" dagli assiomi assunti: "La formula che rappresenta il "principio del terzo escluso" non è derivabile dagli assiomi",[49]

Dal punto di vista della risonanza successiva il secondo articolo che si occupa di dare un'assiomatica per la logica predicativa e per l'aritmetica, è senza dubbio di minore rilievo. Heyting stesso più tardi giudicò quell'esposizione complicata inutilmente e per certi versi incompleta. [115] Tuttavia, alcune idee sono già particolarmente chiare. Il punto di partenza in questo caso è costituito dal calcolo delle funzioni come era stato presentato da Hilbert e Ackermann. Heyting però ne prende subito le distanze precisando come non sia possibile, nel calcolo che sta

[48] Ivi, pp. 208-209.
[49] Ivi, p. 212.

proponendo, la definibilità reciproca di esistenziale e universale. Ciò dipende soprattutto dall'interpretazione che viene data al simbolo (*Ex*). "A parte le differenze causate dalle deviazioni nel calcolo proposizionale, bisogna dire che non possiamo definire né (*x*) attraverso (*Ex*), né (*Ex*) attraverso (*x*). (*Ex*)*a* significa: 'si può indicare l'oggetto *x* per cui vale la proposizione *a*."[50]

Questa interpretazione porta ad ammettere all'interno del sistema le proposizioni:

6.72 $\vdash (Ex) \rightarrow \neg(x)\neg a$
6.73 $\vdash (x)a \rightarrow \neg(Ex)\neg a$
6.74 $\vdash (Ex)\neg a \rightarrow \neg(x)a$

ma non le loro reciproche. Al posto di queste valgono invece: [116] 6.75 $\vdash \neg(x)\neg a \rightarrow \neg\neg(Ex)a$

6.76 $\vdash \neg(Ex)\neg a \rightarrow (x)\neg\neg a$.

Dal punto di vista formale le differenze più rilevanti rispetto al calcolo di Hilbert e Ackermann sono due. Per prima cosa viene fatta decadere la distinzione tra variabili proposizionali e funzionali in quanto per Heyting una proposizione costante è sempre possibile vederla come funzione costante.

Inoltre, come abbiamo visto, viene introdotto con 1.5. il simbolo (*p*/*x*) *per* la sostituzione. L'assiomatica che si riferisce a questo simbolo è ampiamente incompleta. Infatti, una tale assiomatica risulterebbe inevitabilmente troppo complessa. Non è intenzione di Heyting né occuparsi di casi dove appaiono sostituzioni multiple del tipo (*p*/*x, q*/*y*), dove allo stesso tempo *x* può essere sostituito con *p* e *y* con *q*, né di quelli dove in ciò che vogliamo sostituire è in qualche modo già contenuto ciò che al suo posto facciamo subentrare.

È interessante notare l'uso che Heyting fa di un [117] primitivo Ξ per l'identità stretta. La relazione fondamentale tra individui è *p* Ξ *q*, *p* è lo stesso oggetto di *q*".[51] L'identità stretta si differenzia dal concetto usuale di uguaglianza = in quanto quest'ultimo può sussistere tranquillamente tra oggetti che non sono identici (per esempio 1 = 2/2). Si differenzia però anche dall'identità matematica ≡ come è stata definita da Brouwer, in cui si richiede identità per tutte le caratteristiche di importanza matematica, in quanto è lui stesso che sottolinea come due elementi identici per la quantità possono essere originati da sequenze di scelte diverse. Nessuno di questi due simboli rappresenta dunque la relazione "è lo stesso oggetto di"; questo è invece il senso che attribuiamo a Ξ. L'identità stretta non è inoltre sempre riflessiva. Non possiamo sempre scrivere *p* Ξ *p,* poiché in questo modo indichiamo soprattutto che *p* è un segno per un oggetto. [118]

Il primo assioma che Heyting formula per questo simbolo:

6.1 $\vdash \vdash 1\ \Xi\ 1$

[50] A. A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik* II, in "Sitzungsberichte der preussischen Akademie von Wissenschaften", Phisikalisch-mathematische Klasse, pp, 57-71.
[51] Ivi, p. 57.

lo possiamo, infatti, leggere "1 è un oggetto". Ξ ci dà dunque la possibilità di definire termini: "Così ci creiamo la possibilità di introdurre gli oggetti uno dopo l'altro proprio così come succede nella matematica ordinaria."[52]

Questa relazione è invece simmetrica:

6.11 $\vdash\vdash p \,\Xi\, q \rightarrow q \,\Xi\, p$

ed è inoltre introdotta come decidibile:

6.12 $\vdash\vdash p \,\Xi\, p \wedge q \,\Xi\, q \rightarrow p \,\Xi\, q \vee \neg(p \,\Xi\, q)$.

È stato Troelstra il primo a notare come in questa maniera. Heyting anticipa la problematica che sottende la "logica di Scott" con predicato di esistenza. Possiamo pensare che l'idea sia anche qui quella di estendere i quantificatori solo su oggetti esistenti. Per esempio, tra gli assiomi per l'universale abbiamo:

6.32 $\vdash\vdash .(y).y \,\Xi\, y \rightarrow (y/x)a. \rightarrow (x)a.$

ma anche:

6.3 $\vdash\vdash (x)a \rightarrow (p/x)a.$ [119]

che non sarebbe più valido senza l'aggiunta nella premessa di $p \,\Xi\, p$. Inoltre, nota Troelstra, non compare per l'esistenziale la contropartita di 6.32: $(Ey)A(y) \rightarrow (Ey)(y \,\Xi\, y \wedge A(y))$. "Di conseguenza molte regole nell'articolo di Heyting sono infatti valide solo se tutti i termini sono considerati esistenti".[53] Per quel che concerne l'aritmetica, Heyting si appoggia agli assiomi di Peano, ma inserisce il suo sistema all'interno di un formalismo più ampio.

Infine, il terzo articolo fornisce alcuni primi elementi di assiomatizzazione per l'analisi intuizionista. Il valore che questi articoli assumono come contributo intorno alle problematiche maggiori della logica e della matematica è enorme e sicuramente va al di là di quello che lo stesso Heyting aveva loro attribuito. Solo con i lavori successivi che da questo presero origine si rivelerà infatti pienamente la fecondità e la vastità dei campi che l'intuizionismo apriva all'indagine. [120]

Quella che era sembrata una prospettiva estremamente riduttiva e con anguste vie di accesso comincia a mostrare lentamente un'insospettata ricchezza. Ciò non, sarebbe stato possibile permanendo nella chiusura, tipica dell'atteggiamento di Brouwer, verso qualsiasi contributo derivante dalla prospettiva logico-linguistica, ma è anche vero che occorreranno diversi anni prima che tenda ad affievolirsi l'impressione che appoggiarsi a un'assiomatizzazione significhi immediatamente tradire le idee fondamentali dell'intuizionismo. Abbiamo visto come Heyting mantenga questo dubbio anche molti anni più tardi. In effetti, possiamo forse affermare che ciò che gradualmente comincia ad allentarsi è la richiesta vincolante di un'ortodossia stretta al pensiero di Brouwer. La figura del matematico olandese si è venuta lentamente rivalutando proprio tramite questo distacco. La "logica brouweriana" cedeva il posto alla logica intuizionista. [121-125 Note]

---

[52] Ivi, p. 58.

[53] A.S. Troelstra, *Logic in the Writings of Brouwer and Heyting*, cit, p. 203.