UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
FACOLTÀ DI LETTERE E FILOSOFIA

Corso di laurea in Filosofia
Tesi di laurea in Filosofia della Scienza

CONTRIBUTI ALLA STORIA DELLA FORMALIZZAZIONE E DELL'INTERPRETAZIONE DELLA LOGICA INTUIZIONISTA.

Relatore:
Ch.mo Prof. Ettore Casari

Candidato:
Simone Berti

Anno Accademico 1985-1986

INTRODUZIONE

Nella complessa molteplicità di sviluppi che ha avuto nel nostro secolo la logica matematica un posto particolare è occupato dall'opera e dal pensiero di L.E.J. Brouwer, fondatore dell'intuizionismo.

Questo lavoro vuole rappresentare un contributo al fine di una più corretta valutazione del ruolo che ha avuto la formalizzazione della logica intuizionista nel complesso dibattito che tra gli anni '20 e '40 si incentra intorno alla figura del matematico olandese.

È nostra intenzione seguire da vicino il trasformarsi graduale della proposta brouweriana da appendice di un'intera concezione filosofica, a cui appare indissolubilmente legata a oggetto autonomo di studio, trattabile anche matematicamente.

A questo scopo analizzeremo innanzitutto una serie di testi rimasti per lo più poco conosciuti e scarsamente considerati dalla letteratura esistente sull'argomento. Si tratta di alcuni articoli di R. Wavre, M. Barzin, A. Errera, P. Levy e M.A.Khintchine, che rappresentano [II] un primo embrione di dibattito che si viene a costituire intorno all'intuizionismo nella seconda metà degli anni '20 e che si incentra su un aspetto particolare del pensiero di Brouwer, cioè il rifiuto del principio del terzo escluso. In questi testi si evidenzia una forte incomprensione e una confusione di fondo nei confronti delle idee brouweriane, che vengono viste come estrema propaggine del dibattito in corso tra empiristi e idealisti iniziato da. Poincaré e Russell su alcune riviste di lingua francese.

Tuttavia gli scritti in questione rivestono per noi una particolare importanza poiché cominciano a gettare una prima base, seppure spesso approssimativa, verso la formalizzazione di alcune parti dell'intuizionismo nel tentativo di mostrare l'infondatezza della critica brouweriana alla teoria classica. Soprattutto sarà rilevante per noi mostrare come contribuiscano a fare emergere l'esigenza di un lavoro che sciolga alcuni tratti della proposta intuizionista dal peso della visione filosofica totalizzante del suo creatore. [III]

Nel secondo capitolo prenderemo in considerazione i contributi più rilevanti in questo senso. Cercheremo di analizzare infatti l'articolo di A.N. KoImogorov del 1925, che rimase però in un primo tempo ininfluente, poiché sconosciuto nel mondo culturale fuori dall'Unione Sovietica, e il fondamentale contributo di V. Glivenko che attraverso due brevi articoli fornisce un vero e proprio sistema formale intuizionista in una forma pressoché definitiva e traccia alcune prime connessioni fondamentali con il calcolo classico.

Un particolare rilievo sarà dato naturalmente agli articoli di A. Heyting del 1930 che rappresentano una svolta decisiva in direzione della formalizzazione, soprattutto per l'enorme risonanza avuta all'interno del mondo logico matematico non solo intuizionista. In particolare la sua posizione verrà analizzata privilegiando il rapporto con Brouwer e l'influenza determinante di G. Mannoury al fine di mettere in luce lo sforzo costante verso una maggiore chiarificazione dei concetti fondamentali dell'intuizionismo, che [IV] caratterizza tutta la sua opera.

Un terzo capitolo sarà inoltre dedicato in parte all'analisi degli effetti immediati prodotti dal lavoro di formalizzazione di Heyting sul dibattito intorno all'intuizionismo e ad alcuni tra i tentativi più significativi di interpretazione del calcolo logico che vi prende forma.

A questo proposito daremo uno spazio particolare all'interpretazione di Kolmogorov della logica intuizionista in termini di "calcolo di problemi", che pur partendo da un punto di vista indipendente dall'intuizionismo si rileverà particolarmente adeguata a rendere conto della specificità del calcolo a cui ha dato forma Heyting.

Vedremo anche nei dettagli una discussione serrata che coinvolge nei primi anni '30 H. Freudenthal e A. Heyting attraverso uno scambio epistolare e una breve serie di articoli che ruotano intorno alle conseguenze più interessanti che l'idea di "dimostrabilità", idea introdotta a sua volta da Levy nel dibattito iniziale [V] sul rifiuto del principio del terzo escluso, ha su una possibile interpretazione del calcolo logico intuizionista.

Infine dedicheremo la parte conclusiva di questo lavoro ad analizzare alcuni degli articoli più significativi di logici matematici non intuizionisti, che mostrano come, attraverso i sistemi formali che vi si ispirano, l'intuizionismo sia rientrato in piena regola all'interno del dibattito logico anche come un oggetto matematico vero e proprio e, dunque, come sia proprio attraverso la sua creatura resa autonoma che anche la figura di Brouwer comincia a essere al centro di una rinnovata attenzione.

Il presente lavoro vuole essere in contributo nella direzione appena indicata ma non ha alcuna pretesa di rappresentare un lavoro esaustivo sull'argomento.

Per quanto riguarda il simbolismo abbiamo adottato un criterio di fedeltà al testo originale mantenendo per quanto possibile di volta in volta quello usato da ogni singolo autore. Dove questo ci è sembrato appesantire la lettura siamo ricorsi alla simbologia più comune.

CAPITOLO PRIMO

IL DIBATTITO INTORNO AL RIFIUTO DEL "PRINCIPIO DEL TERZO ESCLUSO" NELL'INTUIZIONISMO DI BROUWER

1. *Esistenza e verità nell'intuizionismo di Brouwer. Il rifiuto del "principio del terzo escluso".*

Avvicinandosi a una questione quale quella posta dalla formalizzazione che nel 1930 Heyting dette della logica intuizionista, vorremmo cercare di tracciare brevemente alcuni aspetti dell'elaborazione di Brouwer in relazione alle principali tendenze emerse nel corso del XIX secolo in alcune scienze matematiche.

Durante l'800, e in particolare nella seconda metà, anche in seguito alla formulazione delle geometrie non euclidee, si era venuta a delineare un'attenzione privilegiata diretta all'esplicitazione dei nessi, che vincolano i teoremi ai postulati di una data teoria, indipendentemente da ogni contenuto intuitivo.

Si assisteva così, congiuntamente, al prender campo [2] dello strumento assiomatico come metodo di indagine dei differenti campi del sapere e al radicale mutamento di significato che gli veniva conferito. Ciò che era venuto a decadere era, infatti, il nesso fondante tra verità matematica e intuizione. L'intuizione non poteva essere ritenuta ancora garante della validità di una particolare teoria e si apriva il problema di recuperare questa perdita. In questa prospettiva l'aspettativa intorno alla coerenza interna degli assiomi assumeva sempre più significato fino a caricarsi di un'inedita prospettiva fondazionale.

Questo passaggio si viene a determinare particolarmente nella riflessione sui fondamenti dell'aritmetica e della geometria di Giuseppe Peano e della sua scuola, ma soprattutto in quella che è considerata l'opera più importante di David Hilbert: *I fondamenti della geometria*, pubblicata nel 1899.

Hilbert si distacca definitivamente da qualsiasi ricorso a un fondamento extralogico della geometria e sposta l'accento sullo studio delle proprietà di un dato sistema [3] assiomatico. Il graduale uso del formalismo permette di determinare gli oggetti attraverso segni e di studiare, a livello metalinguistico, quali siano le possibilità di combinazioni ammesse fra questi senza che intervenga alcuna contraddizione. Ciò dà l'impressione di un certo padroneggiamento dell'infinito. Questo, diventando un segno, continua a essere adoperato senza minare ogni possibilità di asserzione nella teoria. Inoltre, la capacità di determinare un dato sistema di assiomi equivale, implicitamente, all'esistenza stessa di un possibile modello. È una svolta radicale intorno al problema dell'esistenza, che viene definitivamente connesso al problema della consistenza degli assiomi.

"Quando siamo impegnati nella ricerca sui fondamenti di una scienza, dobbiamo disporre un sistema di assiomi che contiene una descrizione esatta e completa delle relazioni che sussistono tra le idee elementari di quella scienza. Gli assiomi così disposti sono nello stesso tempo le definizioni di quelle idee elementari; [4] e nessuna asserzione interna al dominio della scienza di cui stiamo collaudando le fondamenta, è ritenuta corretta ameno che non sia derivabile da quegli assiomi per mezzo di un numero finito di passaggi logici".[1]

Compito fondamentale è, per Hilbert, quello di dimostrare che gli assiomi "sono non contraddittori, cioè che un numero finito di passaggi logici basati su dì essi non può mai condurre a risultati contraddittori",[2] cioè una dimostrazione di consistenza per ogni determinato sistema assiomatico. Tale dimostrazione è nello stesso tempo dimostrazione di esistenza matematica per il sistema:esistenza e non contraddittorietà si accostano reciprocamente fino a diventare quasi sinonimi. Si arriva così, in effetti, a una nozione di esistenza astratta e non legata al dato intuitivo.

Con tale richiesta Hilbert rappresenta il punto più alto di una tendenza che mira a oltrepassare ciò che era stato avvertito come crisi dei fondamenti nella seconda metà dell'800, attraverso un drastico distacco da ogni riferimento contenutistico. [5]

---

[1] D. Hilbert, "Mathematische Probleme" (1900), in *Gesammelte Abhandlungen*, vol. III, pp. 299-301, trad. A. Cantini, *I fondamenti della matematica*, Loescher 1979, p. 62.
[2] Ivi, p. 63.

L’ elaborazione di L.E.J. Brouwer si colloca su posizioni decisamente distanti, da queste. In un articolo, pubblicato nel 1912, dal titolo *Intuizionismo e formalismo* Brouwer traccia, attraverso una breve analisi storica, quella che secondo lui è la risposta peculiare dell’intuizionista alle riflessioni che si erano aperte in quel periodo di crisi. Errore per l’intuizionista poteva essere quello di restare troppo aderente alla teoria della conoscenza di Kant. Il rafforzarsi della posizione formalista non era stato solo frutto di una volontà di deviare da quelle che emergevano come indicazioni dall’attività dél matematico. La teoria kantiana, o perlomeno una particolare interpretazione dell’*a priori* in Kant, aveva ricevuto un serio colpo da elementi emersi dallo studio della matematica e della geometria. Brouwer isola a questo proposito due punti. Innanzitutto alcuni risultati della ricerca intorno alla geometria avevano evidenziato come “teorie intere potessero essere trasferite da un dominio all’altro della matematica”.[3] Ciò aveva portato a uno spostamento dell’attenzione 6 sulla forma logica e all’impressione di potersi disinteressare del contenuto.

In secondo luogo Brouwer nota che la scoperta delle geometrie non euclidee non solo aveva evidenziato che “è impossibile sostenere che lo spazio della nostra esperienza ha le proprietà della geometria elementare”[4] ma anche che “non ha alcun significato domandarsi quale sia la geometria che sarebbe vera per lo spazio della nostra esperienza”.[5]

Se ciò aveva avuto anche l’effetto di indebolire la posizione dell’ intuizionismo, questo, per Brouwer, avrebbe ripreso forza “abbandonando l’apriorità kantiana dello spazio, ma aderendo più decisamente all’apriorità del tempo”.[6] Il tempo è l’inizio e la prerogativa di ogni attività matematica. L’intuizione fondamentale del pensiero matematico è quella che Brouwer chiama intuizione della pura “duo-unità”. “La matematica è creata da una libera azione, indipendente dall’esperienza; si sviluppa da un’unica e fondamentale intuizione a priori, che può essere chiamata 7 *invarianza nel cambiamento* come pure *unità nel molteplice*”.[7]

Il fenomeno iniziale è un passaggio di tempo in cui una sensazione cede il posto a un’altra e la prima è conservata dalla coscienza come una sensazione passata. La coscienza abbandonando così lo stato di quiete diventa mente. L’attività matematica è attività essenzialmente mentale.

“Una costruzione logica della matematica, indipendente dall’intuizione matematica è impossibile - poiché con questo metodo non si ottiene altro che una struttura linguistica che rimane irrevocabilmente separata dalla matematica - e per di più è una contraddizione in termini dal momento che un sistema logico ha bisogno dell’intuizione fondamentale della matematica stessa”.[8]

La concezione dell’esistenza matematica nel pensiero di Brouwer non può che essere molto distante da quella di Hilbert. L’esistenza di un oggetto matematico coincide con la reale possibilità che la nostra mente ha, con i suoi mezzi, di costruirlo. L’idea dell’esistenza 8 di entità matematiche indipendentemente dalle loro costruzioni mentali non è abbastanza chiara per servire da base alla matematica.

“Per questo, l’intuizionista non si può mai sentire rassicurato dall’esattezza di una teoria matematica mediante garanzie come la dimostrazione della sua non contraddittorietà, la possibilità di definire i suoi concetti con un numero finito di parole, oppure la certezza pratica che la teoria non porterà mai a incomprensioni nelle relazioni umane”.[9]

Ogni entità matematica viene, così a coincidere con la sua costruzione. Ne deriva un ridimensionamento della portata delle definizioni e delle proprietà matematiche, che vengono ad assumere il carattere, che come vedremo è l’unico valore, che Brouwer attribuisce al linguaggio, di strumento, per altro imperfetto, per la trasmissione delle nostre costruzioni mentali e l’esercizio della memoria. Le dimostrazioni sono rigorose quanto più sono indicazioni precise su come compiere un certo processo mentale, ma non hanno altro 9 valore al di fuori di questo.

---

[3] L.E.J. Brouwer, *Intuitionism and Formalism*, in “Bull. Am. Math, Soc.”, XX, 1912, trad. A Cantini, cit. p. 166.
[4] *Ibidem*.
[5] *Ibidem*.
[6] *Ibidem*.
[7] L.E.J. Brouwer, “Over de grondslagen der wiskunde” trad, A. Cantini, cit. p. 165,
[8] Ivi, pp 165-166.
[9] L.E.J. Brouwer, “Intuitionism and Formalism”, trad. A. Cantini, cit. p.169.

Da tutto ciò deriva, per l'intuizionismo, una concezione particolare della verità. Se la matematica è innanzitutto atto mentale, la mente è esperibile solo attraverso l'introspezione. La verità matematica è dunque verità introspettiva, non può essere ridotta a una proprietà determinata per qualsiasi asserzione in sé e per sé. "Alla domanda su dove risieda l'esattezza matematica si risponde differentemente dalle due parti; l'intuizionista dice: nell'intelletto umano, il formalista dice: sulla carta".[10]

Qualsiasi asserzione matematica è vera solo se introspettivamente verificata, cioè se esiste effettivamente una costruzione mentale che la risolve. Per asserire una proposizione negativa per l'intuizionismo non è dunque sufficiente mostrare che non si riesce in una costruzione della proposizione che vogliamo negare, ma deve essere possibile un'effettiva costruzione della contraddittorietà dell'esistenza di un atto introspettivo di verifica. [10]

Numerose sono le implicazioni, per Brouwer, di tale concezione. In particolare ci interessa il rifiuto della validità universale del "principio del terzo escluso". Questo principio diventa infatti, per l'intuizionista, equivalente all'asserzione che afferma l'esistenza effettiva di una costruzione che risolve ogni problema matematico. Hilbert era convinto che, prima o poi, saremmo arrivati a stabilire la risolvibilità di ogni problema matematico. Si trattava di trovare uno strumento idoneo al compito, (e pensava di averlo trovato nell'assiomatica). In ogni caso prospettare questa eventualità serviva, nel peggiore dei casi, come "prezioso incoraggiamento durante il lavoro".[11]

Per l'intuizionista invece, la risolvibilità di qualsiasi problema matematico, non è assolutamente prospettabile. Questa speranza si infrange contro l'impossibilità di non considerare sistemi infiniti e l'infinito si presenta all'intuizionista solo sul versante potenziale [11] come un processo non terminato e interminabile.

"La lunga credenza nella validità universale del 'principio del terzo escluso' in matematica è considerata dall'intuizionismo come un fenomeno di storia della civiltà, alla stessa stregua della vecchia credenza nella razionalità di π o nella rotazione del firmamento intorno a un asse passante per il centro della terra".[12] La validità di questo principio si restringe ai soli domini finiti. Su uno specifico sistema finito è sempre possibile ottenere la verificabilità delle proprietà che vi sono concepite.

"All'interno di uno specifico sistema fondamentale finito possiamo sempre verificare (cioè dimostrare o ridurre all'assurdo) proprietà di sistemi, cioè verificarne la rappresentabilità in base a corrispondenze prescritte tra gli elementi, su altri sistemi; infatti la rappresentazione determinata delle proprietà in questione può in ogni caso venire eseguite solo in un numero finito di modi, e ciascuno di questi può essere esaminato di per sé e portato a conclusione oppure a un punto di arresto".[13] [12] Su domini finiti una corroborazione empirica è sempre possibile se abbiamo a disposizione il tempo necessario per eseguirla.

Brouwer si ferma successivamente a considerare i motivi per cui siamo passati ad ascrivere un carattere a priori alle leggi della logica teorica fino a conferirle una illegittima prospettiva fondazionale. Noi abbiamo la possibilità di considerare alcuni oggetti e meccanismi del mondo della percezione in modo tale che, per certi tratti, sia possibile un'applicazione delle leggi logiche, anche se di solito, senza ottenere un dominio completo sulle inferenze che vi si traggono.

"A questa verificabilità incompleta delle inferenze che si considerano tuttavia irrefutabilmente corrette, alla nostra parziale ignoranza dei sistemi finiti rappresentati e al fatto che la logica teorica viene applicata più spesso e da più persone a tali oggetti materiali che a oggetti matematici, deve probabilmente attribuirsi il fatto che si è ascritto un carattere *a priori* alle [13] leggi della logica teorica, compreso il "principio del terzo escluso"; e che si sono perse di vista le condizioni della loro applicabilità, che si fondano sulla

---

[10] Ivi, p. 83.

[11] D. Hilbert, "Sur le problèmes futurs des matthématiques", in *Compte rendue due deuxième Congres International des Mathématiciens*, Paros, 6-12 aôut 1900, p. 69.

[12] L.E.J. Brouwer, "Consciousness, Philosophy and Mathematics", in *Proceedings of the 10th International Congress of Philosophy*, Amsterdam 1948, p. 1247.

[13] L.E.J. Brouwer, *Über die Bedeutung des Satzes vom ausgescholossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionstheorie*", in "Journ. Math", CLIV, 1923, pp. 1-3, Trad. A. Cantini, cit. p. 169.

proiezione di un sistema discreto finito sugli oggetti in questione”.[14] Ci siamo negati a tal punto la possibilità di dubitare della validità e universalità di questi principi, da allargare la loro applicabilità perfino ai sistemi infiniti, senza che ci si preoccupasse se i risultati, così ottenuti, fossero sottoponibili ad alcun riscontro empirico.

L’attacco di Brouwer si dirige così contro la critica formalistica. Questa ha tentato di eliminare le contraddizioni in cui si imbattono le teorie erette su questa base, senza analizzarne i presupposti di fondo. Ha inoltre contribuito a estromettere il soggetto pensante dall’attività matematica, sopravvalutando il linguaggio che ne accompagna l’attività mentale. Perciò anche se la critica formalistica raggiunge il suo scopo, “non si guadagnerà nulla di valido matematicamente”.[15] [14]

2. *Esiste una crisi della matematica? Rolin Wavre e la prudenza dell’atteggiamento empirista*

Per molti anni le idee di Brouwer rimasero in una specie di isolamento pressoché totale. Troelstra, in un saggio recentemente pubblicato sul *Nieuw Archief voor Wiskunde*,[16] ricorda come, prima del 1940, anche in Olanda le tesi di Brouwer avessero trovato una certa difficoltà a imporsi. Per comprendere la situazione in cui si trovavano coloro i quali, in questi anni, si erano raccolti intorno all’insegnamento di Brouwer, sono significativi alcuni passaggi, che ricorda Troelstra, dello scambio epistolare tra M.J. Belifante e A. Heyting, in cui i1 primo, nel 1931, diceva di essere riuscito a contare, in tutta l’Olanda, cinque intuizionisti (Schaake, Brouwer, Heyting, Griss, Belifante), e, nel 1936, esultava perché finalmente uno dei suoi studenti si era deciso a seguire il suo corso anche per un secondo anno, consentendogli così di affrontare nuovi argomenti. [15]

All’interno dell’ambiente matematico e logico, in quel periodo, si vedeva il pensiero di Brouwer prevalentemente come una concezione filosofica della vita, che aveva più da spartire con la psicologia che con la matematica. A questo aveva contribuito lo stile argomentativo stesso degli scritti di Brouwer, che era sovente polemico e diffidente nei confronti delle possibilità della comunicazione. Rifiutando decisamente l’uso del simbolismo e spesso accogliendo tratti del pensiero mistico, facilitava prese di posizione sommarie sugli spunti critici e problematici che il suo pensiero indubbiamente conteneva.

Bisogna tener presente, che in un momento nel quale, generalmente, si avvertiva una crisi della matematica, Brouwer appariva un pensatore che, invece di tendere a una risoluzione dei problemi che si ponevano, soprattutto per ciò che riguarda il suo statuto logico e i suoi fondamenti, li radicalizzava e li inaspriva. In occasione di uno scambio piuttosto secco tra Brouwer ed Hilbert a Göttingen a proposito delle tesi intuizioniste, [16] Hans Levy caldeggiava la reazione brusca di Hilbert, esprimendo il parere che, se si fosse pensato di dover “affrontare tutte le difficoltà che ci dice Brouwer, allora nessuno avrebbe più voluto essere un matematico.[17]

In più era determinante l’insistenza di Brouwer sugli elementi soggettivi del sapere matematico e l’atteggiamento di rifiuto nei confronti del linguaggio e della logica come strumenti di conoscenza. Questo contribuiva a sottrarre gran parte del terreno su cui erigere un possibile confronto: la distanza dalle posizioni della matematica classica era avvertita da entrambe le parti come incolmabile. Inoltre, poiché era questo rifiuto ad attirare su di sé la massima attenzione, l’atteggiamento più diffuso, quando cominciò ad accendersi un certo interesse per il suo pensiero, era quello di ritenere indubbiamente penetrante lo spirito critico di Brouwer, ma in genere si preferiva accantonare la maggior parte degli spunti positivi della sua elaborazione. Tanto più, si diceva, che per il momento Brouwer non aveva presentato alcuna contraddizione in cui la logica classica [17] avrebbe dovuto definitivamente cadere. Quindi, anche una parte della sua critica agli edifici tradizionali della matematica e della logica scivolava su conclusioni azzardate e su posizioni estreme poco desiderabili.

---

[14] Ivi, p. 171.
[15] Ivi, p. 172.
[16] A. Troelstra, “Arend Heyting and his contribution to intuitionism”, in *Nieuw Archief voor Wiskunde* (3), XXIX, 1981, pp. 1-23.
[17] C. Reid, *Hilbert*, New York 1970, p. 184.

Vorremmo tentare adesso di delineare alcune tappe di questo primo momento; tappe che testimoniano il disorientamento e l'incomprensione nei confronti del pensiero di Brouwer, articoli e discussioni per lo più dimenticati, ma che possono aiutarci a intravedere la portata del lavoro di Heyting come sforzo teso a estrarre alcuni punti essenziali dell'intuizionismo dall'arbitrarietà con la quale i primi interpreti facevano fronte a una profonda incomprensione.

Nel marzo del 1924 esce, nella *Revue de Metaphysique et de Morale* un lungo articolo di Rolin Wavre teso a fare il punto su un dibattito ormai decennale in seno alla matematica.[18] Questo dibattito ruota intorno a un'"opposizione di spirito" che nel corso del tempo è stata indicata con differenti coppie di termini: empirista/ 18 idealista, pragmatista/realista, intuizionista/formalista. Sono nomi, questi, che "traducono solo un aspetto particolare e nello stesso tempo evocano più di quanto dovrebbero evocare".[19] Per Wavre non va dimenticato infatti, che in ultima istanza sono solo due forme differenti di razionalismo. Wavre non si accorge che identificare queste tre coppie di termini resta una operazione illegittima. Infatti, tende nei suoi articoli a usare come sinonimi i termini "empirista" e "intuizionista", non accorgendosi che per alcuni aspetti l'intuizionista è il più distante dalla posizione empirista. Avendo isolato come tratto determinante dei due atteggiamenti soprattutto l'estrema cautela e prudenza, ritiene di poterli identificare come aspetti differenti di una medesima richiesta di rigore.[20]

Caratteristica principale dell'empirista per Wavre è 19 dunque la sua estrema prudenza. Egli tende a ottenere sempre la massima intellegibilità ed evidenza, rifiutando in tal modo tutte quelle leggi e quei modi del ragionamento che non gli sembrano strettamente rigorosi. L'idealista, invece, crede di poter mantenere lo stesso rigore, senza fare molte concessioni sul registro della cautela, nell'uso di alcune leggi del pensiero. Con i lavori di Hilbert da un lato e quelli di Brouwer e Herman Weyl dall'altro, questa opposizione si avverte in un modo particolarmente deciso negli ultimi tempi, e "diventa di fatto netta a proposito della nozione di esistenza e di un'applicazione sospetta del principio del terzo escluso".[21]

L'atteggiamento di Wavre nei confronti dell'elaborazione di Brouwer è duplice. Per un verso non può fare a meno di considerare decisivo l'apporto della critica del matematico olandese nel corso del dibattito. Ciò è sottolineato anche con una certa enfasi: "C'è bisogno di dire gli orizzonti che scopre questo tipo di intuizionismo matematico, resurrezione del 20 platonismo e del cartesianesimo, per opposizione a tutta la scolastica; di dire, infine, che cosa questa concezione dei rapporti della logica e della matematica sembra suscettibile di apportare alla soluzione di certi problemi filosofici, come quello dell'apparenza logicamente analitica, matematicamente sintetica del ragionamento?"[22] E anche là dove il senso comune si indigna, messo di fronte a paradossi del pensiero, dice Wavre, non va dimenticato che dal senso comune all'evidenza vi è una grande distanza.

Per un altro verso, invece, Wavre si sente costretto continuamente, quando considera gli scritti di Brouwer, a funzionare da filtro per estrarre alcuni punti da altri troppo azzardati e ciò procurandogli un manifesto disagio. "Non nascondo la grande difficoltà che si incontra cercando di esprimere il senso esatto della relazione che stabilisce Brouwer tra la matematica e la logica, e per liberare l'essenziale del pensiero del nostro 21 matematico olandese, un ritorno sulla storia è necessario".[23]

In fin dei conti, abbiamo l'impressione che per Wavre il valore delle tesi di Brouwer si riduca nuovamente a un energico invito verso una maggiore prudenza nell'applicazione di alcuni principI logici. Soprattutto viene sottolineato più volte come i dubbi che di volta in volta l'olandese solleva siano già stati

---

[18] R. Wavre, *Y a-t-il une crise des mathématiques?*, in "Revue de Métaphysique et de Morale"

[19] Ivi, p. 435.

[20] L'accostamento di "empirismo" e "intuizionismo", che Wavre fa in questo articolo, influenzerà ampiamente tutto il dibattito che si svolge in quegli anni. Molti autori continueranno, infatti, a riferirsi al pensiero di Brouwer come a un aspetto dell'empirismo. Noi continueremo a riportare il termine "empirismo" ogni qual volta i singoli autori l'usino esplicitamente nei loro articoli. Occorre però tener presente che si tratta nella maggior parte dei casi di un accostamento improprio.

[21] Ivi, p.436.

[22] Ivi, p. 440.

[23] Ivi, p. 438.

evidenziati anche da Borel, Lebesgue o altri, e questo gli consente di affermare che “deve essere possibile raggiungere il brouwerismo, senza adottare tutte le idee del suo creatore”.[24]

“Conferendo al principio di contraddizione e a quello del terzo escluso un valore puramente formale, senza delimitare in anticipo il loro campo di applicazione applicandoli solo consapevolmente- ci si può premunire contro tutti i rischi di essere vittima del carattere *a priori* che si è loro conferito, a torto o a ragione. Così senza essere costretti ad adottare integralmente l’atteggiamento di Brouwer sui rapporti della logica 22 e della matematica, vedremo di formulare gli stessi dubbi”.[25] Non si tratta di sottrarsi alla giurisdizione della logica tradizionale, ma di sottoporvisi interamente, rispettando più scrupolosamente i suoi principi. Avremo così un altro vantaggio: la chiarezza che manca al pensiero di Brouwer. Wavre non sembra credere molto a una effettiva opposizione fra queste due tendenze. Inoltre, “un confronto tra le due matematiche è impossibile perché l’una è nell’altra in qualche modo”.[26]

Non si tratta di rinunciare né al linguaggio né al ragionamento dell’idealista e ciò non è in contraddizione con il richiedere il rigore delle verifiche empiriste. Da un lato gli idealisti hanno esasperato un sentimento di crisi, insistendo su un pericolo nel quale incorrerebbe l’esistenza stessa della logica. Ciò cui miravano era invece il tentativo di “arrotondare il suo reame”.[27] Dall’altro gli empiristi, e Brouwer in particolare, hanno fatto ricorso a volte a costruzioni troppo azzardate, non riuscendo a rimanere fedeli all’obiettivo che 23 si erano posti. È il caso della teoria degli insiemi di Brouwer. “La sua teoria degli insiemi è di nuovo troppo avventurosa; sembra aver fretta di ritrovare *mutatis mutandis* una buona parte del patrimonio cantoriano”.[28]

In ogni caso in questo momento del dibattito, per Wavre sono gli empiristi che con la loro richiesta di rigore sono avvantaggiati, “ma fintantoché non avranno ancora messo il dito su una specie di *tertium datur* non potranno contraddire gli idealisti e convincerli della necessità di rallentare la loro corsa. Hanno allora la speranza di incontrare il detto *tertium*? I formalisti finiranno da soli in qualche contraddizione? Ciò sembra ben poco probabile”.[29]

È interessante, comunque, notare come Wavre vedesse proprio nel terzo escluso la pietra di paragone sulla quale si stava misurando questa discordanza. Il rifiuto di questo principio era una conseguenza “forse paradossale, ma necessaria”[30] dell’atteggiamento empirista. L’opposizione con gli idealisti, semplificandosi, diventava 24 più acuta.[31]

3. *Marce1 Barzin, Alfred Errera e la proposizione “terza” nella logica brouweriana*

A partire dal 1927, il *Bulletin de la Classe des Sciences* dell’Academie Royale de Belgique accoglie un dibattito intorno all’elaborazione di Brouwer, che ha origine dalla pubblicazione di un articolo di due studiosi belgi: Marcel Barzin e Alfred Errera. L’articolo si intitolava *Sulla logica di Brouwer*.[32]

Ci interessa, a questo proposito, notare per inciso come, in questa fase del dibattito intorno al pensiero del matematico olandese, non venga per lo più problematizzata la legittimità dell’uso di un’espressione quale “logica di Brouwer”. Sulla scia di Wavre, Barzin e Errera riconoscono a Brouwer il merito di aver fatto emergere le conseguenze filosofiche 25 contenute implicitamente nell’atteggiamento dei più estremi

---

[24] Ivi, p. 441.
[25] *Ibidem*.
[26] Ivi. p. 468.
[27] Ivi, p. 467.
[28] Ivi, p. 457.
[29] Ivi, p. 468.
[30] Ivi, p. 467.
[31] Anche,in questi passaggi Wavre non avverte la necessità di considerare più adeguatamente la specificità dell’intuizionismo, che continua a leggere come una radicalizzazione di ciò che nel dibattito fra Poincaré e Russell era chiamato “empirismo”.
[32] M. Barzin e A. Errera, *Sur la logique de M. Brouwer*, in “Acad. Roy. de Belg. Bull. de la Cl. des Sci.” (5), vol. XIII, p. 56-71.

arithmetisants. Pochi erano, infatti, coloro che avevano coscienza di come alle basi del dibattito in corso tra i matematici, si annidasse un problema filosofico di vasta portata. Secondo il parere dei due belgi "Brouwer ci costringe a scegliere oggi tra Kronecker e Aristotele".[33]

Una delle ragioni dell'abbandono del principio del terzo escluso segue dall'atteggiamento empirista nei confronti dell'attribuzione di esistenza. "Affermare una esistenza è costruirla aritmeticamente", e i1principio del terzo escluso è l'origine di una dimostrazione di esistenza non costruttiva. O si ritiene possibile che si diano altri tipi di dimostrazione di esistenza legittimi, o se, viceversa, si prende posizione con gli empiristi, occorre abbandonare la pretesa di validità dell'antico principio per cui data una proposizione, questa è necessariamente o vera o falsa.

"Esaminiamo la proposizione universale: *tutti gli a sono b*. Per provare la sua verità la dimostrazione più rigorosa [26] consisterà nel partire dalla definizione di *a* e far vedere che implica la presenza del carattere *b*. Per dimostrare la sua falsità occorrerà mostrare un *a* che non è *b*, e per farlo occorrerà costruirlo. Ora può darsi che questa dimostrazione della proposizione affermativa non possa essere fatta e d'altra parte che tutti gli sforzi di costruire un *a* non-*b* restino vani. Queste due ipotesi possono ammettersi simultaneamente. Allora cosa diventa la proposizione? Essa non è né vera né falsa nel senso che Brouwer dà a questi due termini. Essa non è né vera né falsa: essa è dunque *terza*."[34]

Ma cosa può significare, si chiedono, che una proposizione è terza? Per Barzin e Errera ritenere che il "terzo" sia l'indimostrato, che nel tempo si accerterà vero o falso, è ridurre la riforma di Brouwer a poca cosa. Bisogna affermare che "comunque progredisca il sapere, resterà un residuo di proposizioni che non saranno mai né vere né false".[35] [27] da ciò deriva per loro che la "terzità" di una proposizione non è uno stato soggettivo di ignoranza, ma al pari della verità e dell'errore, "un fatto logico obiettivo".[36]

È con questo passaggio che i due autori cominciano a muovere le loro obiezioni nei confronti della logica brouweriana, intesa come logica tripartita. Innanzitutto si chiedono se la costruzione effettiva di una "proposizione terza" non sia l'unico modo possibile per Brouwer di dimostrare la realtà di questo nuovo essere logico. Lui stesso, ricordano, ha avvertito questa esigenza senza però riuscire a dare degli esempi soddisfacenti. Ma non vogliono impostare la loro critica partendo da questo punto, anche perché già Wavre aveva a volte sottolineato a proposito che gli esempi dati da Brouwer stabiliscono una possibilità e non affermano l'esistenza di una "proposizione terza". Rilievo a nostro avviso importante, ma dal quale gli autori non sembrano ricavare ulteriori indicazioni. Il loro intento è quello di mostrare l'impossibilità di [28] un ragionamento che ammetta un "terzo" senza cascare in contraddizione. Le notazioni che usano sono tratte da Russell e Whitehead.

"Noi rappresentiamo con p, q, r, ... le proposizioni delle quali parliamo. Il simbolo p rappresenta l'enunciato *p è vero*. Il simbolo $\sim p$ (non p, cioè la negazione di p) rappresenta l'enunciato *p è falso*. Il simbolo p' rappresenta l'enunciato *p non è né vero nè falso* o per abbreviare *p è terzo*."[37]

Passano successivamente a enunciare il teorema, la cui dimostrazione è un momento essenziale al loro scopo.

"Teorema: *la nozione di stato terzo* (p') *di una proposizione p implica contraddizione.*"[38]

Per arrivare alla dimostrazione di questo, elencano una serie di postulati, considerati necessari a tale compito. Innanzitutto, alcuni che ritengono apertamente ammessi da Brouwer. Essi sono:

A - una parte del "principio della doppia negazione":

---

[33] Ivi, p. 57.
[34] Ivi, p. 58.
[35] Ivi, p. 59.
[36] *Ibidem*.
[37] Ivi, p. 60.
[38] Ivi, p, 66.

$$P \rightarrow \sim\sim P,$$

la verità di una proposizione implica la falsità della [29] *sua falsità*.

B - principio di trasposizione:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p),$$

se una proposizione ne implica un'altra, allora la falsità della conseguenza implica la falsità della premessa.

C - principio del sillogismo:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r),$$

se una proposizione implica una seconda e questa seconda implica una terza la prima implica la terza.

Inoltre aggiungono due nozioni ausiliari, di cui a loro avviso Brouwer non si è mai occupato, ma che ritengono "ammessi da tutti o quasi i ragionamenti", e che "appaiono evidenti".

D - "il prodotto logico o affermazione simultanea: *due o più proposizioni formano un prodotto logico quando sono tutte vere*. Il prodotto logico della proposizioni si simbolizza come il prodotto algebrico $p.q$ o semplicemente pq, che si può leggere p e q".[39]

D' - "la somma logica o alternativa: più proposizioni formano una somma logica quando [30] *una almeno tra loro è vera*. La somma logica della proposizioni p, q si simbolizza con $p \vee q$ che si può leggere p o q. Sottolineiamo che questa relazione non esige che le proposizioni si escludano."[40]

La somma e il prodotto logico sono proposizioni in quanto suscettibili di essere vere o false. Dalle loro definizioni derivano:

D11 - *quando il prodotto logico è vero ciascuno dei suoi termini è vero,*

$$pq \rightarrow p;\ pq \rightarrow q.$$

D12 - *quando un termine di una somma logica è vero la somma logica è vera*,

$$p \rightarrow (p \vee q);\ q \rightarrow (p \vee q).$$

Inoltre postulano tre regole, "indispensabili a tutti i ragionamenti", che permettono di combinare le due nozioni ausiliari con l'implicazione. Essi sono

D21 - *quando una proposizione implica il prodotto logico di altre due, essa le implica separatamente, e reciprocamente*,

$$(p \rightarrow q) \,.\, (p \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow qr).$$ [31]

---

[39] Ivi, p. 61.
[40] *Ibidem*.

D22 - *se una proposizione implica la somma logica di altre due, allora o implica l'una o implica l'altra, e reciprocamente:*

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow (q \vee r)).^{41}$$

D23 - *se due proposizioni implicano separatamente una stessa proposizione, allora la loro somma logica implica questa proposizione, e reciprocamente:*

$$(p \rightarrow r) . (q \rightarrow r) \equiv ((p \vee q) \rightarrow r).$$

A nostro avviso, nell'enucleare i principi che ritengono ammessi da una supposta "logica brouweriana", Barzin ed Errera non si trovano sorretti da una reale problematizzazione di come il termine "logica" può apparire in questa espressione. Ciò che sembra mancare principalmente, nell'esposizione dei due belgi, è che, al di là del rifiuto esplicito di alcuni principi, dichiarato da Brouwer, non si domandano se è possibile far rimanere inalterate le valenze attribuite ai connettivi logici.

Questo li avrebbe potuti portare a un atteggiamento più problematico nei confronti della somma e del prodotto, assunti qui come leggi universali del pensiero, necessarie a qualsiasi ragionamento. Sono trattati infatti [32] indipendentemente da quella che è vista da loro come "la questione del terzo", e viene loro attribuito un campo analogo a quello che hanno nella logica tradizionale. A parer nostro è questa mancanza, insieme al considerare il "terzo" come fatto logico obiettivo, che li porta a enunciare un nuovo principio. Ed è ciò che gli autori chiamano "principio del quarto escluso", partendo dalla constatazione che le tre affermazioni possibili a riguardo di una proposizione *p*, e cioè che *p* è vera, *p* è falsa, *p* è terza, costituiscano una somma logica. Questo principio sostituisce il "principio del terzo escluso" della logica classica. Occorre riformulare in questo modo anche il "principio di non contraddizione". Esso diventa:

"*È impossibile che una proposizione sia nello stesso tempo vera e falsa, falsa e terza, terza e vera*".

A questo punto la dimostrazione del teorema passa prima attraverso quella di due lemmi.

Lemma 1 - *La condizione necessaria della falsità di somma logica è la falsità di ciascuno dei suoi termini*: [33]

$$(\sim(p \vee q)) \rightarrow (\sim p \,.\, \sim q).$$

Lemma 2 - *Se un termine di un prodotto logico è falso. allora il prodotto logico è falso*, *e viceversa*:

$$(\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow \sim(p \,.\, q).^{42}$$

Questi due lemmi sono necessari per allargare la definizione di somma e di prodotto, una volta che si è introdotto lo stato "terzo" ma ormai sono presi semplicemente come diretta conseguenza del "principio del quarto escluso".

Gli autori passano successivamente alla costruzione della somma logica:

$$(\sim(\sim p) \rightarrow \sim(\sim p \vee p')) \vee (\sim(\sim p) \rightarrow \sim(\sim p' \vee p''))$$

---

[41] [Nota di AS. Questa è una tesi classica, ma non intuizionista. Intuizionisticamente vale $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \vee r))$, ma non l'inversa.]

[42] [Nota di AS. Questa legge, equivalente alla prima di de Morgan, è una tesi classica, ma non intuizionista. Intuizionisticamente, vale $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim(p \,.\, q)$, ma non l'inversa.]

(dove per *p”* si intende: *l’affermazione che p è terzo è terza*), le cui due parti si lasciano ridurre rispettivamente nelle due formule:

$$p' \rightarrow \sim p \text{ e } p \rightarrow p',$$

con le quali pensano di essere giunti alla contraddizione definitiva.

Le conclusioni di Barzin e Errera sono le seguenti “Il principio stesso di Brouwer ci conduce dunque a 34 questa alternativa di contraddizioni evidenti: o dobbiamo ridurre il “terzo” al falso, o è il vero che dobbiamo ridurre al terzo. Ma mai sussiste la possibilità della logica tripartita che voleva instaurare”.[43]

Il tentativo di Brouwer è dunque arrivato a un punto morto. Essi ritengono che le idee dell’intuizionismo, portate alle loro estreme conseguenze, raggiungono sì una coerenza ma " una coerenza di un miraggio evanescente”.[44] I postulati modificati non permettono più nessun rapporto tra il vero e il falso. Si stabiliscono così nuove relazioni tra un gruppo di proposizioni vere e un gruppo di proposizioni non vere. Queste ultime comprendono il falso e il “terzo”. La conclusione a cui arriva è di ristabilire i vecchi rapporti della teoria bipartita della logica tradizionale con lo svantaggio di aver perso qualsiasi interesse pratico per la falsità. Il merito di Brouwer si riduce così all’aver rilevato i limiti di un’aspettativa eccessiva nei confronti dell’aritmetizzazione: “Brouwer ci ha fornito l’occasione di constatare che, 35 se l’aritmetizzazione è un metodo tecnico estremamente fecondo, resta di applicazione parziale come tutti i metodi tecnici. Invece i criteri universali di rigore sono le leggi immutabili della logica”.[45]

Gli errori, più o meno grossolani, nei quali questi due autori incappano, sia nell’interpretazione delle idee di Brouwer, sia per ciò che riguarda più propriamente la dimostrazione a cui mirano, furono notati quasi subito. Alcuni articoli pubblicati nel *Bulletin* nei mesi immediatamente successivi misero in evidenza soprattutto errori interni ai passaggi con i quali Barzin e Errera portavano avanti la loro tesi e alle regole ammesse come “indispensabili a ogni tipo di ragionamento. In particolare, fra questi, vorremmo notare l’articolo di M.A.Khintchine.

Khintchine mostra infatti come, accettando quelle regole, si pervenga a contraddizioni. perfettamente analoghe anche in logica classica. A servire da base alla contraddizione è la regola D22, che equivale ad ammettere che l’antecedente di una proposizione vera può essere 36 qualsiasi cosa e che qualsiasi cosa può formare la conseguenza di una proposizione falsa.[46] È un’interpretazione dell’implicazione. Se questa viene accettata, allora non c’è niente di contraddittorio, (infatti: se p è vero, allora vale $\sim p \rightarrow p$, mentre se p è falso, allora vale invece $p \rightarrow \sim p$); se non si accetta, allora è impossibile ottenere le conclusioni di Barzin e Errera. Perciò per Khintchine l’articolo in questione è incapace di fissare la distinzione voluta tra logica classica e logica brouweriana.

Ma non è tanto questo, a nostro avviso, l’aspetto da sottolineare. Se questo articolo ha avuto un merito è stato proprio quello di evidenziare come, ancora nel 1927, molti aspetti del pensiero di Brouwer rimanessero oscuri. Proprio dal dibattito che ne segui dovevano 37 emergere alcune fondamentali precisazioni.

Forse per la prima volta il problema di un’interpretazione logica di alcuni aspetti dell’intuizionismo sembrò meno lontano di quanto il distacco drastico preso da Brouwer aveva fatto supporre fino ad allora.

4. *Paul Levy: logica classica, logica mista, logica brouweriana. Il semplice enunciato di una proposizione e la sua affermazione brouweriana.*

---

[43] Ivi, p. 68.
[44] Ivi, p. 69.
[45] Ivi, p. 69-70.
[46] Khintchine pensa che la D22 sottintenda sostanzialmente l’interpretazione classica del connettivo $\rightarrow$ e lo considera perciò equivalente al principio del terzo escluso. In realtà la D22 è sì fonte della contraddizione, ma è già valida in D (logica di Dummet), cioè in una logica che non ammetta necessariamente due valori di verità, ma anche più valori purché ordinati in scala. Non è dunque un principio intuizionista, ma non è neanche necessario ammettere la validità del principio del terzo escluso per accettare D22 tra le formule del sistema formale.

Un primo contributo al dibattito di quegli anni lo porta Paul Levy. Questi aveva già espresso nel 1926 alcune perplessità a proposito di alcuni tratti del pensiero di Brouwer in risposta agli articoli di Rolin Wavre sulla *Revue de Métaphysique et de Morale*. Il problema centrale che pone la logica brouweriana, e in particolare la sua posizione intorno al "principio del terzo escluso" e a quello della "doppia negazione", si lascia ricondurre per Levy a questa domanda fondamentale: [38] "È possibile chiamare a giudizio un problema matematico perfettamente ben posto, di cui la risposta sia *si* o *no* senza alcuna ambiguità e senza terza ipotesi logicamente possibile, ma tale che le regole della logica siano impotenti a determinare mai quale delle due eventualità è realizzata?".[47]

Questo problema è per Levy essenziale e va posto, ma non è condivisibile la posizione, a suo dire estrema, di Brouwer che camuffa e priva della sua vera natura la questione, costruendo *ad hoc* dei paradossi non fondati su altro che su un cattivo impiego di definizioni mal espresse. "Da dove deriva che un teorema potrebbe esser vero e non dimostrabile?"[48] Seguendo questa domanda Levy arriva a distinguere l'indimostrabilità di un teorema dal fatto che non si sia ancora in grado di dimostrarlo e che forse si possa non esserlo mai.

Quest'ultimo caso non ha in sé niente di stupefacente, perché per lo più le verifiche passano tramite un'infinità [39] di casi particolari e sarebbe, al contrario, sbalorditivo se ogni volta riuscissimo a ridurli a una formula unica. Per quanto riguarda la logica "ci sembra che abbia adempiuto al suo ruolo mostrando le caselle che certi teoremi verranno forse a riempire un giorno". La critica empirista gli sembra in ogni caso eccessiva e mostra di non comprendere su quali basi questa pretenda di erigersi.[49]

Ciò emerge chiaramente in alcune dichiarazioni che Levy fa all'inizio di un articolo che scrive in risposta a Wavre, dove prende le distanze dalla posizione che questi aveva assunto. "Io credo di aver compreso l'atteggiamento che Wavre adotta relativamente alle regole della logica empirica, ma non saprei seguirle. Io non posso ammettere l'interdizione arbitraria di enunciare certi risultati che mi sembrano evidenti, di porre certi problemi che mi sembra si pongano e di impiegare a questo fine il linguaggio che mi sembra più comodo e che d'altro canto [40] è conforme all'uso. Wavre giustifica questa interdizione dicendo che questo linguaggio non gli sembra perfettamente chiaro; io cerco invano cosa ci trova di oscuro".[50] Quando Barzin ed Errera pubblicano il loro articolo, Levy coglie l'occasione per riprendere e approfondire alcune indicazioni che erano emerse in questi primi scritti.

La contraddizione, a cui i due belgi hanno creduto conducesse la logica di Brouwer, deriva unicamente dalla confusione tra due nozioni che devono invece restare distinte: il semplice enunciato di una proposizione e la sua affermazione brouweriana. Mantenendo questa distinzione la logica ispirata alle idee del matematico olandese si lascia ricondurre per Levy sotto due forme leggermente differenti che chiama "logica mista" e "logica brouweriana". Il suo intento è di mostrare come, così precisata, questa logica non rappresenti altro che "una scelta tra proposizioni della logica classica e una loro traduzione in un linguaggio speciale"[51] e le risulti [41] così impossibile rimanere fedele fino in fondo alle proprie assunzioni, evitando di sfociare nuovamente in qualche contraddizione. Contraddizione che non è però quella voluta da Barzin ed Errera. Vediamo perché.

Consideriamo due enunciati α e β contraddittori tra loro. "Diremo che α è *vero nel senso di Brouwer* (in breve *vero-Br*; si può dire anche *dimostrabile*) se è possibile dimostrare la verità di α. Designeremo questa affermazione brouweriana di α con $+\alpha$ o ancora con A. Porremo ugualmente $+\beta \equiv B$. Notiamo che in tutti i casi due segni + consecutivi equivalgono a uno solo; se è possibile dimostrare la verità di α,

---

[47] P. Levy, *Sur le principe du tiers exclu et sur les théorèmes non susceptibles de démonstration*, in "Revue de Métaphysique et de Morale" 33 (2), 1926. pp. 253-258.
[48] Ivi, p. 255. [Nota di AS. Questo è l'enunciato del teorema di incompletezza dell'aritmetica, dimostrato da Gödel cinque anni dopo.]
[49] Ivi, p. 258.
[50] P. Levy, *Critique de la logique empirique*, in "Redvue de Métaphysique et de Morale", 33 (4), 1926, pp. 545-551.
[51] P. Levy, *Logique classique, Logique brouwerienne et Logique mixte*, in "Acad. Roy. de Belg. Bull. de la Cl. des Sc." (5), XIII. 1927.

allora è possibile dimostrare quella di A, in modo che si abbia $+A \equiv A$. Chiameremo proposizione brouweriana o enunciato brouweriano tutte le proposizioni P definite con una formula del tipo $P \equiv +p$. Si ha dunque $+P \equiv P$; una proposizione brouweriana non può essere vera senza essere anche dimostrabile”.[52]

Il “principio classico del terzo escluso” vale per due [42] enunciati semplici α e β, ma non per i corrispettivi brouweriani A e B, poiché non è sempre dimostrabile per qualsiasi enunciato la propria verità o falsità. L’enunciato per cui non si sia data la possibilità di questa dimostrazione è considerato *terzo*, analogamente a Barzin ed Errera. Formula inoltre anch’egli un “principio del quarto escluso”, ma la distinzione eretta precedentemente gli permette di procedere attraverso l’individuazione di ulteriori casi. “L’enunciato ‘α è terza’ non è un’affermazione brouweriana, occorre dunque distinguere due casi secondo che si possa o no dimostrare che α è terza”.[53] Il primo caso è indicato da Levy con $+\alpha \equiv C$, il secondo con α”. Quest’ultimo è di nuovo un caso non brouweriano, ma è impossibile procedere in ulteriori suddivisioni perché non possiamo prendere in considerazione il simbolo $+\alpha$”, che è di per sé contraddittorio. “Se in effetti si potesse dimostrare che si è nel caso α”, si potrebbe ugualmente dimostrare che si è nel [43] caso α‘, e per definizione del caso α” non si può. Se dunque è possibile, e anche necessario, concepire il caso α” come una possibilità logica, non si saprà mai quando si è in questo caso”.[54]

Da queste differenti suddivisioni Levy individua tre possibili logiche distinte:

1) La *logica classica*. Questa individua sei casi possibili; infatti, la domanda “α è vera o falsa?” resta sensata in logica classica anche per i casi C e α”. Avremo così γ_{I} e γ_{II} per C e α_{I}” e α_{II}” per α” secondo che α sia vera o falsa. Abbiamo dunque A, B, γ_{I}, γ_{II}, α_{I}”, α_{II}”.

2) La *logica mista*. Questa ammette invece solo quattro casi possibili: A, B, C, α”. L’enunciato di α” continua a servire da base per la definizione dei casi B e C, ma non ci permette un’ulteriore suddivisione di C e α”. Non ha senso, infatti, domandarsi, per questi casi, se vera o falsa, in quanto usa questi termini in senso strettamente brouweriano (fatta eccezione solo per quando si tratta di α”). [44]

3) La *logica brouweriana*. Questa non considera l’enunciato di α a nessun livello. Considera A come base per gli altri casi. Ammette solo tre diverse possibilità: A, $+\sim A$ (cioè la negazione brouweriana di A), α”. Non distingue infatti i casi B e C poiché in entrambi A è *falsa-Br* (nel primo è dimostrabile la falsità di A, nel secondo la sua indimostrabilità), ed è terza solamente nel caso α”.

Ora, α” è una possibilità destinata a restare tale. Per definizione infatti non è dimostrabile e dunque, in ogni caso, non potremo mai sapere se siamo realmente di fronte a una proposizione terza.

Si vede da questo, per Levy, come sia impossibile “restare fino in fondo fedele alla sua idea direttrice, che è quella di non enunciare mai altro che proposizioni brouweriane, cioè tali che il loro enunciato implichi la possibilità di una dimostrazione”.[55] Se si può parlare quindi di un fallimento per ciò che riguarda il tentativo di delineare una logica che si fondi su alcune idee tracciate da Brouwer, questo è [45] tuttavia per Levy irrilevante rispetto a quello che è a suo parere l’autentico obiettivo della logica, cioè “prevedere e classificare i differenti casi logicamente possibili”.[56]

Levy è sostanzialmente scettico nei confronti della portata del pensiero di Brouwer e fondamentalmente ritiene che abbia un certo peso solo rispetto a un limite attuale della nostra conoscenza o a una aspettativa eccessiva nei suoi riguardi. L’opposizione di fronte alla quale ci troviamo è per lui innanzitutto uno scontro tra differenze psicologiche di fronte a enunciati “che non hanno l’aspetto assolutamente preciso e tangibile al quale l’aritmetica e l’algebra elementare ci hanno abituato”.[57] Questi enunciati, evitati quanto più è possibile dagli empiristi, hanno invece per gli idealisti un’attrattiva in più in quanto permettono loro di uscire dal campo abituale delle ricerche scientifiche. Se questa opposizione

[52] Ivi, p. 257.
[53] Ivi, p. 258.
[54] *Ibidem*.
[55] Ivi, p. 260.
[56] Ivi, p. 266.
[57] *Ibidem*.

venisse riconosciuta in quanto differenza psicologica non assumerebbe la forma di una contraddizione logica. [46] “Ma se la psicologia empirica diventa una logica empirica, e se questa cambia il senso usuale delle parole vero e falso al fine di impedire in modo più sicuro al pensiero idealista di penetrare nelle regioni proibite, non c’è da stupirsi se quello si rifiuta di inchinarvisi. Per parte mia, il nuovo linguaggio mi sembra più nocivo che utile, e in tutti i casi non apporta niente di nuovo: tutti i risultati della logica brouweriana possono enunciarsi con il linguaggio usuale e servendosi dei termini dimostrabile e indimostrabile a mio avviso diventerebbero anche molto più comprensibili.”[58]

L’incomprensione, che Levy mostra continuamente in questi articoli, nei confronti del pensiero di Brouwer si poggia in gran parte sul tentativo di collocare l’intuizionismo in una prospettiva che lo inquadri come estrema propaggine del dibattito iniziato da H. Poincaré e B. Russell anni prima sulla *Revue de Metaphysique et de Morale*. Oltre a una costante confusione terminologica, si continua, infatti, a insistere sulla richiesta di rigore e sul carattere limitativo della nuova proposta ed è dunque [47] unanime la riserva per la parte positiva del pensiero del matematico olandese della quale non si coglie la portata. D’altro canto questa riserva era favorita dallo stile polemico usato da Brouwer nella presentazione delle sue idee. In questo senso anche il goffo tentativo di formalizzazione fatta da Barzin ed Errera resta prezioso, poiché in qualche modo rimane un primo passo in questa direzione e fa intravedere l’esigenza e la possibilità di una ripresa più rigorosa di un tale tentativo. [48-52 Note]

[58] *Ibidem*.