Cartesio, Freud, Brouwer
Verso un'epistemologia dell'inconscio
di Antonello Sciacchitano

Secondo seminario

Monza, 12 ottobre 2003

Formule notevoli

La volta scorsa ho presentato il modo sintattico di fare logica. Oggi lo userò concretamente, cioè collettivamente. Insieme dimostreremo per esercizio alcune tesi logiche notevoli. Sporcheremo insieme della carta. Anche la matematica ha una propria componente pulsionale, in questo caso anale.

L'incontro di oggi si inserisce in una lunga e faticosa, forse per molti penosa, marcia di avvicinamento all'epistemologia dell'inconscio. Non ne parlerò direttamente neppure questa volta. La tesi che voglio sviluppare tra questo seminario e il prossimo è che per formulare un'epistemologia dell'inconscio occorre mettere in atto un processo di indebolimento. Indebolimento sì, ma di che cosa? Bisogna presentare la cosa da indebolire prima di indebolirla. In Italia è attiva una corrente filosofica nota come "pensiero debole". Cosa vogliono indebolire i debolisti? La metafisica, che in varie forme è stata forse troppo presente – perfino in modo asfissiante – nel pensiero occidentale. Il mio programma non è molto diverso. Mi propongo di indebolire la logica classica – aristotelica o booleana – che della metafisica, in forma di logocentrismo, è il braccio armato. L'evangelico *in principio era il logos* mi può anche andar bene – in nome del mio intuizionismo, non sono né per dio né contro dio, ma in modo più attivo degli agnostici, nel senso che combatto con altrettanta forza sia chi vuole dimostrare l'inesistenza di dio sia i fanatici dell'esistenza di dio, magari *kamikaze* – purché, dicevo, il *logos* non diventi anche il fine e la fine del discorso, chiudendolo tutto nelle sue spire. Il *logos* tende a opporsi alla diversità e alla varietà, che sono invece le prerogative dell'*arithmos*, del numero. Ricordate il ritornello che non mi stancherò mai di ripetere: la matematica, quindi la logica, si può fare in tanti modi. Indebolire la logica, vuol dire preparare la strada a tante forme di sapere, un programma pluralista e democratico.

Anticipo qui un concetto che tornerà utile parlando, nel prossimo seminario, dell'indebolimento binario come generalizzazione della logica. Una variante del ritornello "la matematica si può fare in tanti modi", recita: un problema si può generalizzare in molti modi. Non tutti sono interessanti e neppure fecondi allo stesso modo. Alcuni modi sono più interessanti di altri o perché facilitano la ricerca della soluzione o perché connettono campi di indagine finora non collegati. *A priori* non si sa quale sia il modo di generalizzare più fecondo di risultati. Trovare la giusta generalizzazione del problema è il vero metaproblema del matematico. La logica intuizionista è una generalizzazione feconda della logica classica, perché permette di dimostrare teoremi epistemici, che in logica classica non hanno posto. La topologia è una generalizzazione (indebolimento) della geometria che unifica gran parte della matematica. Il logocentrismo è nemico della pluralità di modi di trattare la verità, quindi odia la generalizzazione. Esso stabilisce il primato di una sola logica, precisamente la logica dell'Uno. Dall'ontologia apparentemente innocente dell'Uno alla pratica della dittatura il passo è breve. Quindi, in nome della democrazia, indeboliamo l'Uno, fondamento della logica classica, e dedichiamoci a proficue generalizzazioni. Questo potrebbe essere anche un programma politico.

Ma prima di indebolire la logica classica bisogna *ap-prenderla*, per poter poi dire in che punto vada indebolita. L'apprendimento passa inevitabilmente attraverso gli esercizi, che sono il momento della verifica collettiva del paradigma. Nel momento collettivo dell'insegnamento ritroviamo la struttura tipica del contesto giustificativo. Sono all'opera due funzioni: un maestro e una scolaresca. Il maestro "giustifica" il paradigma davanti agli allievi. Il maestro conosce meglio il paradigma e gli scolari lo apprendono, vedendo come questi lo giustifica, cioè come lo coniuga. Qui la funzione del maestro è essenziale e imprescindibile, non in nome dell'ortodossia, ma delle esigenze di apprendimento. Serve ad *ap-prendere* meglio in pratica, cioè esercitandolo, il *concetto* teorico (*conceptum* da *cum* e *capio*, *prendere con*). Comincio con gli esercizi di sintassi e poi passo a quelli di semantica.

Della sintassi ho presentato la volta scorsa due modi di svilupparla: il modo di Frege, con assiomi e regole, e il modo di Beth, con formule marcate e solo regole. Non sono i soli modi. Molti autori hanno presentato le loro varianti, tutte più o meno miscelanti diversi rapporti tra assiomi e regole, tutte equivalenti. Qui non dimostro che Beth equivale a Frege, perché non tengo un corso di logica matematica. Credetemi sulla parola. È una delle rare volte che invoco per me il principio di autorità.

Piuttosto mi sento di fare una considerazione. Pare che il desiderio del matematico sia di stabilire che due cose apparentemente diverse sono uguali. Quasi sempre gli riesce. Ogni tanto la diversità resiste al *furor semplificandi* del matematico e non si lascia azzerare. È proprio il caso della divisione tra sintassi e semantica, che non sempre è "suturabile" come se non ci fosse. Ma è un caso *sui generis*. Effettivamente gli approcci sintattico e semantico sono equivalenti in logica, ma non lo sono in aritmetica. Alla fine della giornata arriverò a uno schema di dimostrazione di questo metateorema di logica, noto come teorema di completezza della logica e incompletezza dell'aritmetica.

Precisazione non solo terminologica. L'equivalenza dei due approcci sintattico e semantico è un metateorema. Infatti, è un teorema su teoremi e non sarà dimostrato in modo meccanico, come i teoremi interni alla logica, ma in modo informale (e omettendo molti dettagli tecnici). In pratica mostrerò che in ambito sintattico si dimostrano i teoremi in un modo, in ambito semantico si dimostrano le verità universalmente valide (questo è il nome di "teorema" semantico) in un altro, ma quel che si dimostra in un modo non è molto di più né molto diverso da quel che si dimostra nell'altro modo e viceversa. Tuttavia, prima di arrivare ai metateoremi, che sono teoremi esterni alla logica – sono *sulla* logica, non *di* logica –, mi sembra più prudente esercitarsi a dimostrare meccanicamente teoremi interni alla logica o *di* logica.

Già la volta scorsa ho dimostrato alla Beth alcune note tesi: i principi logici dell'ontologia, cioè identità (l'essere è), non contraddizione (l'ente non può essere e non essere) e terzo escluso (l'ente o è o non è). Oggi continuo il lavoro affrontando la dimostrazione di alcune tesi variamente note, alcune addirittura famose. Lo scopo dell'esercizio non è commentare queste tesi ma impratichirsi nell'uso della tecnica sintattica alla Beth, forse per convincervi di quanto sia pratica ed elegante. Il matematico è sensibile alla bellezza della dimostrazione, che deve essere, se possibile, elementare, cioè deve ricorrere il meno possibile all'infinito, e compatta, cioè non prolissa.

Ex falso quodlibet

Comincio dal principio che i medievali chiamavano *ex falso quodlibet*, attribuito a Duns Scoto, il *doctor subtilis* della teologia oxoniense. A lui interessava dimostrare logicamente l'esistenza di dio; io mi accontento di molto meno. Il concetto è che, se in una teoria emerge una contraddizione del tipo *p et non p*, si può dimostrare tutto e il contrario di tutto. Si dice che il sistema degenera o collassa, ma sarebbe meglio dire che esplode. In un sistema sano l'insieme dei teoremi è un sottoinsieme proprio della classe delle fbf, cioè alcune fbf *non* sono teoremi. Per esempio, proprio la contraddizione *p et non p* non è un teorema. Se le due classi coincidono c'è qualcosa che non va. Nel caso, il sistema perde la *vis* dimostrativa. Dimostrare tutto, infatti, significa dimostrare nulla. Lo dimostrano le ideologie politiche di un recente passato che pretendevano di spiegare tutto con una semplice formuletta. Il loro valore è pari a quello di certe teorie psicanalitiche che interpretano tutto con la stessa grammatichetta. Mi riferisco esplicitamente a certe semplificazioni ispirate all'identificazione proiettiva della Klein o, peggio, al principio di ambivalenza di Bleuler o, ancora, al doppio legame di Bateson (vedi avanti *Contro gli pseudoparadossi*). Per trattare la sovrapposizione degli stati soggettivi odioamorosi o autonomodipendenti il teorico della psiche deve inventare tecniche più raffinate del banale ricorso alla contraddizione e agli pseudoparadossi a essa connessi. Dire con Freud che l'inconscio non conosce contraddizione obbliga a pensare una logica diversa dalla classica, ma pur sempre logica. L'indebolimento della logica che presenterò va nella direzione del trattare anche la contraddizione con rigore.

Il principio *ex falso quodlibet* si può scrivere in tanti modi. Lo presento in questo:

$$p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q),$$

perché in seguito, quando avrò affrontato la questione dell'indebolimento, potrò riformularlo in versione indebolita. Il *falso* è qui rappresentato dalla possibilità contraddittoria di utilizzare successivamente sia p sia $\neg p$. In un certo senso nel pensiero occidentale la contraddizione è il falso per antonomasia. Il *quodlibet* è rappresentato dall'iniziale q, una variabile proposizionale *qualunque*. La formula si legge: se è dato p, allora, se è dato *non p*, allora segue qualunque q. La formula può essere difficile da leggere per l'incassamento dei connettivi di implicazione uno nel campo di applicazione dell'altro, nel senso che un'implicazione implica un'implicazione. Ma con un po' di attenzione si supera la difficoltà.

Come sempre procedo meccanicamente. Inizio falsificando la tesi da dimostrare e vado alla ricerca di una contraddizione:

$$\mathbf{F}(p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)).$$

Come è quasi universalmente riconosciuto – la verità logica è meno astratta che collettiva – la falsità dell'implicazione è scritta all'incrocio della quarta riga con la seconda colonna della tabella sopra riportata. Nella casella leggo che l'implicazione è falsa se l'antecedente è vero e *al tempo stesso* il conseguente falso. La verità dell'antecedente è $\mathbf{V}p$ e la falsità del conseguente $\mathbf{F}(\neg p \Rightarrow q)$. Scrivo su una sola linea:

$$\mathbf{V}p, \mathbf{F}(\neg p \Rightarrow q).$$

Osservazione *en passant*. L'esercitazione è anche per impratichirsi a usare le parentesi, un uso che forse abbiamo dimenticato dai tempi in cui calcolavamo le espressioni algebriche sui banchi di scuola. Le parentesi segnano il "passo" della dimostrazione. Partiamo con due parentesi incassate l'una nell'altra. Sciogliamo l'esterna al primo passo e ci troviamo con l'interna al secondo. Le parentesi si "pelano" come una cipolla dall'esterno verso l'interno, trattando la parentesi interna come un'unità, non importa quanto sia complessa dentro. L'importante è che al passo successivo mi trovi davanti a una cipolla un po' meno stratificata della precedente.

Al terzo passo scrivo le acquisizioni dei passi precedenti e svolgo le parentesi rimanenti. $\mathbf{V}p$ è acquisito e lo trascrivo tale e quale. La volta scorsa vi ho detto che in questa logica il vero è acquisito per sempre. *Ktema es aei*, dicevano gli antichi Greci. Io parlo di principio di monotonia della verità.

Mi trovo ancora di fronte alla falsificazione di un'implicazione. La tratto esattamente come la precedente. Il meccanicismo è anche questo: reagire in modo costante a stimoli uguali. Il quarto passo consiste nello scrivere la riga dimostrativa senza più parentesi:

$\mathbf{V}p, \mathbf{V}\neg p, \mathbf{F}q.$

[Durante la trascrizione commetto degli errori. Non bisogna temere gli errori. Il metodo meccanico consente di correggerli quasi automaticamente. Questo è il vantaggio di disporre di un algoritmo di calcolo. La formalizzazione della logica ha ricevuto una spinta essenziale dall'esigenza di dimostrare l'assenza di errori nella pratica matematica].

Nella trascrizione conservo la verità di p e affronto la verità della negazione di p. Come la tratto? Come dice la tabella all'incrocio della prima riga con la prima colonna. Dai tempi di Aristotele si sa che la verità della negazione è la falsità dell'affermazione. In conclusione scrivo:

$\mathbf{V}p, \mathbf{F}p, \mathbf{F}q.$

La dimostrazione finisce qui. Si chiude il processo dimostrativo. *Chiuso* è il termine tecnico per designare un ramo dell'albero dimostrativo dove compare una contraddizione. Ho ottenuto, infatti, la verità e la falsità della stessa variabile proposizionale sulla stessa riga. Ciò è in contraddizione con il principio di bivalenza, secondo cui una variabile proposizionale può assumere uno solo dei (due) valori di verità. Il risultato è l'impossibilità di falsificare *ex falso quodlibet*. In termini che ricorreranno anche in seguito, dico che non esiste il contromodello che falsifichi la fbf. La fbf che sopravvive al trattamento di falsificazione è un teorema. Il fatto si scrive alla Frege:

$\vdash p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q).$

che si legge: è un teorema il principio *ex falso quodlibet.* La meccanicità del processo con cui ho acquisito il risultato non dovrebbe lasciar adito a dubbi. Sui rapporti tra meccanicismo e certezza tornerò nell'ultimo seminario.

Un'ultima osservazione, tuttavia. Nella dimostrazione appena conclusa interviene in modo rilevante la proposizione contraddittoria p, mentre q può essere veramente qualunque. Ciò significa che basta una specifica e ben determinata contraddizione – basta una puntura di spillo – per far esplodere il sistema. La logica, che usa di continuo la non contraddizione nelle dimostrazioni per assurdo, sembra maneggiare una bomba. Vedremo in seguito una forma di indebolimento che resiste alla minaccia del disastro contraddittorio e non sarà, come immaginate, l'inconscio freudiano, che senza patemi ospita la contraddizione.

Consequentia mirabilis

Una variante del principio di dimostrazione per assurdo è la cosiddetta *consequentia mirabilis*, che nei secoli ha goduto di una fama non immeritata ma forse eccessiva. Si tratta di una dimostrazione per assurdo autoriferita. Infatti, utilizza una sorta di autocontraddizione per dimostrare ciò di cui parla. Si scrive:

$$(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p,$$

che con un po' di retorica si legge: se la negazione implica l'affermazione, allora l'affermazione è vera. Il successo della formula fu dovuto alla facilità con cui si poteva dimostrare un'affermazione p partendo dalla sua negazione. Esiste una classe di affermazioni autoconfutanti che hanno certamente contribuito alla fama del principio. Una delle più discusse è "non esiste la verità". Essa è chiaramente autoconfutante. Infatti, se la frase tra virgolette è vera (notate il passaggio metalinguistico), allora è falso che non esista almeno una verità, quindi la verità esiste. (Argomento usato contro gli infedeli e gli scettici). Per alcuni logici, per esempio Piergiorgio Odifreddi, sarebbe autoconfutante il processo dubitativo di Cartesio. Ogni affermazione può essere revocata in dubbio – argomento caro agli scettici. Ma questa affermazione è indubitabile perché io stesso, revocando in dubbio tutto (notate il passaggio metalinguistico dall'enunciato all'enunciazione), so per certo che sto dubitando. Quindi non tutte le affermazioni sono dubitabili ed esiste almeno un'affermazione indubitabile: il mio dubbio.

A proposito di Cartesio annuncio che nell'ultimo seminario spenderò qualche parola sul suo processo dubitativo, per darne una versione più debole, quindi più accettabile, di quella riferibile alla *consequentia mirabilis*. Per farlo dovrò aver prima realizzato l'indebolimento della logica classica. La sensatezza del mio progetto è dovuta alla circostanza logica che, se si dimostra una tesi con strumenti deboli, si guadagna un livello di generalità maggiore. Infatti, se la dimostro con strumenti forti, ottengo di dimostrare la tesi in un campo più ristretto, là dove tali strumenti si applicano e non altrove. Questo argomento a favore dell'indebolimento giustifica il mio interesse per esso. Mi interesso all'indebolimento non solo per arrivare a un'epistemologia dell'inconscio, ma anche per acquisire una metodologia di portata euristica più vasta rispetto alla classica, nel senso che, se qualcosa vale in ambito *non* classico, automaticamente vale in quello classico.

Ho detto prima che la *consequentia mirabilis* è una forma forte di dimostrazione per assurdo. Eseguito l'indebolimento, non varrà più. Varrà invece una sua forma debole. Il principio che sto seguendo nel presentarvi le formule notevoli è di passare in rassegna quelle che valgono in logica classica ma non valgono o valgono in forma modificata nelle logiche più deboli. (Al plurale! Come al solito, essendo un'operazione matematica, l'indebolimento si può realizzare in più modi). La premessa è importante perché familiarizza con tesi classiche non deboli, che in una delle successive logiche indebolite serviranno per definire operatori epistemici. Ma non anticipo troppo.

Come sempre, falsificando la *consequentia mirabilis*, si ottiene:

$\mathbf{F}((\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p)$.

Sono ancora di fronte al falso di un'implicazione, quindi scrivo a memoria:

$\mathbf{T}(\neg p \Rightarrow p)$, $\mathbf{F}p$.

Scusate, sono abituato a scrivere verità **T**, da *true*, perché ho appreso questa tecnica su testi inglesi. Mi correggo:

$\mathbf{V}(\neg p \Rightarrow p)$, $\mathbf{F}p$.

Qui incontro per la prima volta qualcosa di nuovo: la verità dell'implicazione. Come si trascrive? Consulto la tabella, non come oracolo o come prescrizione dell'*ipse dixit*, ma come sedimento del sapere logico di millenni. (La collettività matematica non è un'astrazione atemporale. Si evolve nel tempo). All'incrocio della quarta riga con la prima colonna, trovo il caso in cui la dimostrazione si spacca in due tronconi o rami. Da qui la necessità, scrivendo, di usare le parentesi per distinguere i due rami. Userò le parentesi graffe per distinguerle dalle tonde, che ricorrono nelle fbf. La tabella mi dice che la verità dell'implicazione si trascrive ponendo in un ramo la falsità dell'antecedente e nell'altro ramo la verità del conseguente. In pratica, la verità dell'implicazione si comporta come la verità dell'alternativa. Anche nel caso dell'alternativa la dimostrazione arriva a un bivio e si divide in due rami. La differenza è che ora, invece di porre rispettivamente nei due rami la verità del primo e del secondo termine, si pone in un ramo la falsità del primo (antecedente) e nell'altro la verità del secondo (conseguente). Il resto va trascritto così com'è e ripetuto, ovviamente, in entrambi i rami.

$\{\mathbf{F}\neg p, \mathbf{F}p\}, \{\mathbf{V}p, \mathbf{F}p\}$.

Cosa si vede a questo punto? Si vede che un ramo dell'albero – qui quello di destra – è chiuso, come si dice tecnicamente, cioè contiene una contraddizione: la verità e la falsità della stessa affermazione p. Per il principio di bivalenza so che valori di verità opposti non possono coesistere nella stessa variabile proposizionale. Perciò da lì la dimostrazione non può più proseguire. Ho concluso la dimostrazione? No, perché esiste ancora un ramo che può crescere, non contenendo ancora contraddizioni. La dimostrazione per assurdo è completa solo quando *tutti* i rami – non basta uno solo – sono chiusi. Mi disinteresso, pertanto, del ramo chiuso, che considero "morto", e che scriverò convenzionalmente con due graffe vuote.

$\{\}$

Non resta che dedicarmi all'altro ramo della dimostrazione, che ho buone ragioni per considerare ancora "aperto" o "vivo", perché non contiene una patente contraddizione. Qui trovo la falsità dell'affermazione: $\mathbf{F}p$. La trascrivo tale e quale, perché non è ulteriormente analizzabile. Il risultato

$\{\mathbf{F}p\}, \{\}$

è che in logica classica il falso si conserva per sempre esattamente come il vero. Se ho acquisito la falsità di p, scrivo ancora la falsità di p. Ricordate questo punto, perché la monotonia del falso cadrà nel successivo indebolimento. Ma ci vuole ancora un po' di pazienza. Nel ramo in questione c'è ancora una formula analizzabile, ossia trascrivibile con le regole di deduzione: $\mathbf{F}\neg p$. All'incrocio della prima riga e della seconda colonna della tabella leggo che la falsità di *non p* si trascrive come verità di p. detto fatto:

$\{\mathbf{V}p, \mathbf{F}p\}, \{\}$.

Ora tutti i rami della dimostrazione sono chiusi, perché anche nel secondo ho scovato una contraddizione. *Ergo* falsifico la falsificazione iniziale e annovero la *consequentia mirabilis* tra i teoremi della logica classica:

$\vdash (\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$.

Cardano, medico-astrologo-matematico del Cinquecento, era innamorato perso della formula, che credeva di aver scoperto. In realtà il procedimento deduttivo della *consequentia mirabilis* era già noto a Euclide, che l'utilizzò per dimostrare un bel teorema aritmetico: se il fattore p divide la potenza a^n, allora divide già la base a. La dimostrazione di Euclide, elementare nonché ingegnosa, combina il metodo per assurdo con una sorta di metodo induttivo a rovescio, che scende verso l'uno anziché salire verso l'infinito. Nel Settecento il gesuita Saccheri utilizzò la *consequentia mirabilis* per tentare di dimostrare il postulato delle parallele. Saccheri fallì, ma il suo fallimento fu fecondo. Un secolo dopo fiorirono le geometrie non euclidee.

Le doppie negazioni

Tutti abbiamo nelle orecchie, dall'apprendimento della grammatica prima che della matematica, il ritornello che due negazioni affermano: negare una negazione significa affermare. "Non è possibile che non" vuole addirittura dire che "è necessario". "Non esiste uno che non goda di una certa proprietà" vuol dire che "tutti godono di quella proprietà". Vediamo se questi discorsi sono "logicamente" attendibili. Per introdurre al discorso dell'indebolimento distinguo due casi: la doppia negazione debole e la forte. La prima introduce la doppia negazione, spostandola sul conseguente dell'implicazione, la seconda la elimina, spostandola sull'antecedente. "Introduzione" e "eliminazione"sono due concetti sintattici importanti, mediante i quali si può ricostruire tutto il calcolo sintattico. Il calcolo "naturale" di Gentzen si basa proprio su questa possibilità: definisce regole per introdurre gli operatori logici e regole per eliminarli. Segnalo la possibilità, senza tuttavia svilupparla, come uno dei tanti modi di fare logica. Come avete visto, nell'approccio sintattico si scrive molto. Se non disponessimo di regole per introdurre e per cancellare simboli (anche cancellare è scrivere, secondo Derrida) non realizzeremmo nessuna sintassi. Quindi dal punto di vista sintattico l'introduzione e l'eliminazione di operatori sono momenti importanti.

La doppia negazione debole è la legge che permette di introdurre la doppia negazione:

$p \Rightarrow \neg\neg p$,

da leggere: se p è vera, allora non è vera non p. Segnalo la legge perché in qualche modo dà l'idea di non contraddizione o coerenza del sistema. Se, per ogni p vero posso affermare *non non p*, vuol dire che *non p* è falso; quindi p è vero e non contraddice p.

Procedo speditamente nella dimostrazione:

$\mathbf{F}(p \Rightarrow \neg\neg p)$;
$\mathbf{V}p$, $\mathbf{F}\neg\neg p$;
$\mathbf{V}p$, $\mathbf{V}\neg p$;
$\mathbf{V}p$, $\mathbf{F}p$,

quindi:

$\vdash p \Rightarrow \neg\neg p$

La doppia negazione forte è una legge di eliminazione della doppia negazione:

$\neg\neg p \Rightarrow p$.

In sintesi la dimostrazione procede sui binari consueti, applicando le regole dall'esterno della formula verso l'interno:

$\mathbf{F}(\neg\neg p \Rightarrow p)$;
$\mathbf{V}\neg\neg p$, $\mathbf{F}p$;
$\mathbf{F}\neg p$, $\mathbf{F}p$;
$\mathbf{V}p$, $\mathbf{F}p$,

quindi

$\vdash \neg\neg p \Rightarrow p$.

Data la verità dell'implicazione nei due sensi, le due tesi (debole e forte) si unificano. Si semplifica la notazione con il bicondizionale, che riassume tutto il lavoro dimostrativo:

$\vdash \neg\neg p \Leftrightarrow p$.

Segnalo infine le versioni quantificate della legge di doppia negazione, che stabiliscono l'intercambiabilità dei quantificatori, che si possono definire l'uno in rapporto all'altro. Tutto succede come se in logica classica bastasse un solo quantificatore. Presento la versione debole della doppia negazione quantificata, ancora una volta per confermare le mie preferenze deboliste:

$\vdash \forall x.p(x) \Rightarrow \neg\exists x.\neg p(x)$,

che si legge: se tutti gli x sono p, allora non esiste un x che non sia p. La dimostrazione si fa in sei righe e con zero fantasia:

$\mathbf{F}(\forall x.p(x) \Rightarrow \neg\exists x.\neg p(x))$;
$\mathbf{V}\forall x.p(x)$, $\mathbf{F}\neg\exists x.\neg p(x)$;
$\mathbf{V}\forall x.p(x)$, $\mathbf{V}\exists x.\neg p(x)$;
$\mathbf{V}\forall x.p(x)$, $\mathbf{V}\neg p(a)$ (a nuovo);
$\mathbf{V}p(a)$, $\mathbf{V}\neg p(a)$;
$\mathbf{V}p(a)$, $\mathbf{F}p(a)$.

Analogamente si dimostra:

$\vdash \exists x.p(x) \Rightarrow \neg\forall x.\neg p(x)$.

Le leggi di de Morgan

Vi presento le leggi di de Morgan per introdurre un discorso che si chiarirà man mano. Anche in questo caso si tratta di un bicondizionale che con l'indebolimento diventerà un condizionale semplice.

$p \vee q \Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$;
$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$.

Le formule sono simmetriche – il termine tecnico è *duali* – l'una dell'altra e restituiscono l'intercambiabilità tra congiunzione e alternativa grazie alla doppia negazione. Il punto da ritenere è che in logica classica si può definire un operatore attraverso l'altro, come in precedenza ho definito un quantificatore attraverso l'altro. Ciò significa che gli operatori messi in campo sono troppi per le esigenze della logica classica. In effetti, come già visto per i quantificatori, è possibile ridurne il numero. Lo vedremo ancora in semantica. Dei tre connettivi binari ne basta uno, purché si conservi la negazione, per esprimere gli altri in funzione di quello. Le leggi di De Morgan affermano che si può definire la congiunzione attraverso l'alternativa e viceversa. Si dice che i due connettivi sono interdefinibili, come per esempio i quantificatori. (Esistono analogie tra operatore esistenziale e alternativa e operatore universale e congiunzione).

Digressione. La possibilità di ridurre i quattro connettivi a due soli ha conseguenze economiche. Sapete che i *chips* dei computer sono formati da circuiti booleani. Essi implementano i valori di verità attraverso porte aperte e porte chiuse. Se si riesce a esprimere tutte le funzioni logiche attraverso due soli operatori: per esempio il *non* e l'*et* (a loro volta assemblabili nel solo operatore *nand*) si realizza un grosso risparmio nel processo produttivo. Che a sua volta si semplifica e si meccanizza più facilmente. Il capitalismo ringrazia de Morgan.

Per esercizio dimostro la prima legge di de Morgan in forma debole. I primi due passi sono i soliti: falsificazione della formula da dimostrare

$\mathbf{F}((p \vee q) \Rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q))$,

e trascrizione della falsità dell'implicazione, tenendo presente che questa volta l'antecedente e il conseguente sono formule complesse racchiuse tra parentesi:

$\mathbf{V}(p \vee q)$, $\mathbf{F}\neg(\neg p \wedge \neg q)$;

A questo punto posso, anzi devo, scegliere: o sviluppo la prima parentesi per prima o la seconda. Devo, infatti, trattare le due sottodimostrazioni separatamente nei due casi. Perciò devo trattarli separatamente senza trascurare nessuno dei due. Come vedete, nonostante il suo determinismo, la matematica si può fare in molti modi. Una scelta può essere più conveniente dell'altra. Sottolineo il fatto perché circola il luogo comune che la verità matematica è "matematica", cioè unica e tassativa. Con il corollario che la matematica, come la scienza in generale, essendo oggettiva, elimina il soggetto. Lo "fuorclude", come dicono i lacaniani. Non è vero. Il soggetto agisce all'interno delle dimostrazioni operando scelte più o meno convenienti. Come direbbe Lacan, il soggetto matematico è agente, cioè più simile al soggetto isterico che all'ossessivo, anche se ama agghindarsi con bardature ossessive.

Opto per lo sviluppo della prima parentesi, lasciando la seconda al passo successivo. Si tratta della verità dell'alternativa, quindi, come ho già fatto osservare, devo spezzare la dimostrazione in due tronconi, uno per ciascuno dei due componenti dell'alternativa:

$$\{\mathbf{V}p, \mathbf{F}\neg(\neg p \wedge \neg q)\}, \{\mathbf{V}q, \mathbf{F}\neg(\neg p \wedge \neg q)\}.$$

Affronto ora la seconda parentesi, che ora si presenta due volte: una volta in ciascun ramo. Procedo falsificando la negazione e trascrivendo il risultato ottenuto al passo precedente. Opero prima nel primo ramo:

$$\{\mathbf{V}p, \mathbf{V}(\neg p \wedge \neg q)\}, \{\mathbf{V}q, \mathbf{F}\neg (\neg p \wedge \neg q)\}$$

e poi nel secondo:

$$\{\mathbf{V}p, \mathbf{V}(\neg p \wedge \neg q)\}, \{\mathbf{V}q, \mathbf{V}(\neg p \wedge \neg q)\}$$

Come vedete si procede molto lentamente. C'è tutto il tempo di addormentarsi tra un passaggio e l'altro. Si procede esattamente come farebbe un computer: *step by step*, trattando una parentesi graffa alla volta. Nella lentezza sta la certezza del risultato. D'altra parte, capite bene che, se si costruiscono dei computer sulla base di queste formule, bisogna essere sicuri della loro correttezza. Non possono essere solo approssimativamente o statisticamente vere. Il computer sbaglia già per conto suo per questioni termodinamiche. L'inevitabile aumento di entropia durante l'esecuzione dei calcoli, dovuto al rumore di fondo o termico, può trasformare casualmente l'uno di un bit in uno zero. Pertanto il computer deve potersi correggere automaticamente seguendo algoritmi certi e implementazioni affidabili. Altrimenti il costruttore di computer non può vendere le sue *business machines*. La logica serve all'informatica non solo pratica ma anche teorica. Quest'ultima ha aspetti autenticamente scientifici e non si limita e ad applicare un po' di matematica ai processi produttivi, come la *computer science* non si riduce all'ingegneria dei transistor e alla nanotecnologia. Basti pensare alla teoria dei computer quantistici prossimi venturi, che sostituiranno gli attuali supercomputer e rivoluzioneranno la vita dei miei nipoti, realizzando la prima materia pensante diversa dall'uomo.

L'ultimo passo per sciogliere la parentesi consiste nel trattare la verità della congiunzione. Ciò non pone molti problemi: si tratta della verità di entrambi i congiunti:

$\{\mathbf{V}p, \mathbf{V}\neg p, \mathbf{V}\neg q\}, \{\mathbf{V}q, \mathbf{V}(\neg p \wedge \neg q)\}$;
$\{\mathbf{V}p, \mathbf{V}\neg p, \mathbf{V}\neg q\}, \{\mathbf{V}q, \mathbf{V}\neg p, \mathbf{V}\neg q)\}$.

Anche in questo caso ho libertà di scelta. Scelgo di trascrivere la verità della negazione di p nella prima parentesi e successivamente la verità della negazione di q nella seconda. Ottengo così di chiudere successivamente entrambi i rami della dimostrazione. Rappresento la chiusura del ramo dimostrativo con lo svuotamento della parentesi graffa corrispondente:

$\{\mathbf{V}p, \mathbf{F}p, \mathbf{V}\neg q\}, \{\mathbf{V}q, \mathbf{V}\neg p, \mathbf{V}\neg q)\}$;
$\{\}, \{\mathbf{V}q, \mathbf{V}\neg p, \mathbf{F}q)\}$;
$\{\}, \{\}$.

Il laborioso ma non difficile compito dimostrativo – tanto facile che può essere affidato a una macchina non particolarmente intelligente – finisce qui. La prima formula di de Morgan è così finalmente dimostrata. Consolido il guadagno dimostrativo, il *Beweisgewinn* dei tedeschi, giustapponendo il simbolo di Frege

$\vdash p \vee q \Rightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$.

La seconda legge di de Morgan si dimostra analogamente. Lascio per esercizio la dimostrazione delle implicazioni inverse "forti".

La legge di contrapposizione

Terminerò gli esercizi sintattici con le contrapositive. Sicuramente prima d'ora non avete mai sentito parlare di contrapositive. "Contrapposizione" è il termine della logica scolastica per indicare la conversione di un giudizio affermativo nel corrispondente negativo o viceversa. Modernamente si intende per contrapositiva dell'implicazione $p \Rightarrow q$ la fbf $\neg q \Rightarrow \neg p$. La legge forte delle contrapositive stabilisce l'equivalenza tra l'implicazione e la sua contrapositiva. Sto dicendo con altre parole quel che sapete già. Contrapposizione è l'altro nome di assurdo. Per dimostrare *se p allora q*, procedo per assurdo. Suppongo *non q* e derivo come conseguenza *non p*, la quale confligge con l'ipotesi di partenza p. La contraddizione dimostra che da p non si deduce *non q* ma q, come volevasi dimostrare. Userò questo schema dimostrativo quando, alla fine del discorso di logica classica, arriverò al teorema di completezza.

Il riferimento alla dimostrazione per assurdo dice l'importanza della legge delle contrapositive. Insieme alla legge del *modus ponens* (a sua volta una forma di transitività), essa è (quasi) sufficiente a costruire un sistema di logica. Per mostrarvi l'interazione tra le due leggi vi darò un esempio di modo di dimostrare una legge logica – la legge di tripla negazione di Brouwer – un po' diverso da quello finora adottato. Prima, ovviamente, devo dimostrare la legge delle contrapositive. Dimostrerò quella debole:

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$,

lasciando per esercizio l'inversa forte, cioè quella con la freccia *tra* le parentesi orientata in senso opposto. (Le frecce entro parentesi rimangono tali e quali). Per familiarizzarvi con la sua formulazione darò il solito esempio: "Se piove (p), allora c'è bagnato (q), implica che, se per terra non c'è bagnato (*non q*), allora almeno non ha piovuto (*non p*)”. Altri eventi non sono successi che avrebbero potuto lasciare bagnato per terra, ma quel che in base alla prima implicazione posso dire è che almeno non ha piovuto.

Inizio falsificando l’intera fbf – *in principio erat falsum* o *proton pseudos*, secondo Aristotele:

$$\mathbf{F}((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)).$$

Tutto procede come prima riguardo alla falsità dell’implicazione. Vale sempre la verità dell’antecedente e la falsità del conseguente.

$$\mathbf{V}(p \Rightarrow q), \mathbf{F}(\neg q \Rightarrow \neg p).$$

Ancora una volta mi trovo con un grado di libertà da spendere. Che strada prendo? Svolgo la prima parentesi o la seconda? Apparentemente – per quanto ne sappiamo ora – è indifferente. Tiro una monetina e scelgo di svolgere la prima parentesi. Mi tocca spaccare la dimostrazione in due rami, come prescrive l’incrocio della quarta riga con la prima colonna della tavola delle regole. Preparo i posti:

$$\{\}, \{\}.$$

In un ramo pongo la falsità dell’antecedente, insieme alla formula già ottenuta al passo precedente:

$$\{\mathbf{F}p, \mathbf{F}(\neg q \Rightarrow \neg p)\}, \{\};$$

nell’altro ramo pongo la verità del conseguente, copiando la formula già acquisita:

$$\{\mathbf{F}p, \mathbf{F}(\neg q \Rightarrow \neg p)\}, \{\mathbf{V}q, \mathbf{F}(\neg q \Rightarrow \neg p)\}.$$

Procedo trascrivendo ancora la falsità dell’implicazione, prima in un ramo,

$$\{\mathbf{F}p, \mathbf{V}\neg q, \mathbf{F}\neg p\}, \{\mathbf{V}q, \mathbf{F}(\neg q \Rightarrow \neg p)\},$$

poi nell’altro:

$$\{\mathbf{F}p, \mathbf{V}\neg q, \mathbf{F}\neg p)\}, \{\mathbf{V}q, \mathbf{V}\neg q, \mathbf{F}\neg p\}.$$

Ricordate questo passaggio quando arriveremo all’indebolimento. La monetina non mi ha fatto fare una buona scelta. Poi capirete che le due mosse non erano equivalenti e la scelta non era indifferente. Per ora non ci sono conseguenze gravi della scelta casuale.

Ho due rami. Possibilmente devo chiuderli entrambi. A tal fine in uno trasformo la falsità della negazione in verità dell’affermazione e ottengo una contraddizione su p:

$$\{\mathbf{F}p, \mathbf{V}\neg q, \mathbf{V}p)\}, \{\mathbf{V}q, \mathbf{V}\neg q, \mathbf{F}\neg p\},$$

nell’altro la verità della negazione in falsità dell’affermazione e ottengo una contraddizione su q:

$\{\}, \{\mathbf{V}q, \mathbf{F}q, \mathbf{F}\neg p\},$

concludendo la dimostrazione con la tesità della formula:

$\vdash (p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$

La legge di Brouwer o della triplice assurdità

Sono ora pronto a mostrarvi quanto la legge delle contrapositive sia potente nel dimostrare teoremi. Un esempio, già annunciato, lo mostrerò alla fine di questo seminario, quando affronterò il teorema di completezza. È stata una mia scelta di non adottare il modo fregeano di fare sintassi – quello con assiomi e regole. Frege utilizza come assioma la legge delle contrapositive. Vi darò un assaggio del modo di procedere di Frege in un caso, nella dimostrazione della legge di Brouwer di tripla negazione:

$\neg\neg\neg p \Rightarrow \neg p.$

La quale mi dà anche l'occasione per anticipare il discorso sulla negazione nell'indebolimento della logica classica. Brouwer, che pure realizza l'indebolimento, ha una concezione forte della negazione. Per lui la negazione significa ridurre all'assurdo. Allora la legge della triplice negazione si legge così: è semplicemente assurdo – una volta sola – affermare che l'assurdo dell'assurdo sia assurdo – tre volte. Come interpretare l'assurdo? Per i logici l'assurdo è vicino alla necessità che negare sia una necessità. Per Freud, che nella *Traumdeutung* sviluppa una logica dialogica – purtroppo ho dimenticato di illustrare questo ennesimo modo, molto più divertente degli altri, di fare logica: si può presentare tutta la sintassi come gioco a due, dove uno tenta di dimostrare un teorema e l'altro di confutarlo – Freud, dicevo, interpreta l'assurdo, per lo meno quando compare nei sogni, come modo per mettere l'altro alla berlina. Ma poi – vorrei sapere davvero – che differenza c'è tra il modo freudiano faceto di interpretare l'assurdo e il modo serio della dimostrazione per assurdo da noi tante volte usato?

Questa volta il punto di partenza della dimostrazione, invece della solita falsificazione, è un teorema già dimostrato. In mancanza di teoremi già dimostrati il metodo sintattico di Frege utilizza un assioma. Infatti, gli assiomi sono teoremi a tutti gli effetti, in quanto dimostrati *a priori*. (Il significato etimologico di *assioma* è *degnità*, cioè verità degna di essere posta in cima a ogni dimostrazione in quanto autoevidente). Da debolista parto dalla legge debole di doppia negazione:

$\vdash p \Rightarrow \neg\neg p.$

Contrappongo la doppia negazione debole. Ottengo:

$\vdash (p \Rightarrow \neg\neg p) \Rightarrow (\neg\neg\neg p \Rightarrow \neg p).$

Applico il *modus ponens* alle due righe dimostrative. L'implicazione è un teorema, l'antecedente dell'implicazione è un teorema, quindi anche il conseguente è un teorema. Concludo:

$\vdash \neg\neg\neg p \Rightarrow \neg p.$

Partendo dalla legge forte di doppia negazione potrei dimostrare allo stesso modo l'implicazione inversa della legge di Brouwer e, infine, la sostanziale equivalenza tra negazione semplice e tripla. Abbastanza curiosamente l'equivalenza vale anche in logica debole, dove tuttavia non vale la legge forte di doppia negazione. Per convincersene basta dimostrare:

$\vdash \neg p \Rightarrow \neg\neg\neg p$,

al solito modo, ma con certe precauzioni di cui dirò al prossimo seminario.

La riduzione classica

Ho già detto che in logica classica i tre connettivi binari, *vel*, *et*, *seq*, si possono ridurre a uno, purché si conservi la negazione. Le leggi di de Morgan assicurano la riducibilità – tramite la negazione – del *vel* all'*et* e viceversa. Ma l'implicazione, come si riduce a uno degli altri due connettivi? Per fortuna non devo pensarci io. Ci ha già pensato Filone di Megara duemila e duecento anni fa. Filone era uno stoico della scuola di Crisippo. Il fatto non è generalmente noto perché la logica stoica fu sopravanzata, soprattutto a causa della predominanza del pensiero teologico medievale, dalla logica aristotelica. Ma gli Stoici svilupparono una parte notevole della logica, soprattutto in versione proposizionale (cioè senza analisi dei predicati). La logica era per gli Stoici, infatti, una delle tre discipline di base, insieme alla fisica e all'etica. Se dovessi dire quale delle correnti di pensiero classico si avvicina di più al pensiero scientifico moderno (cartesiano) non avrei dubbi nello scegliere lo stoicismo, naturalmente più per le posizioni di partenza materialistiche che per quelle di arrivo.

La concezione dell'implicazione materiale, cioè dell'implicazione più debole che ci sia, risale appunto a Filone e fu rimessa in auge da Frege nella sua *Ideografia*. Sulla verità di tale forma di implicazione tornerò a parlare ampiamente tra poco in semantica. Per ora annuncio che la legge debole di Filone si scrive:

$\vdash (\neg p \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,

che si legge: se *non p o q, allora p implica q*, mentre quella forte, che stabilisce l'equivalenza tra le due formule tra parentesi e, quindi la riducibilità classica dell'implicazione all'alternativa, si scrive cambiando il verso dell'implicazione..

Italo Carta. *Puoi dare una versione semantica della legge di Filone*?

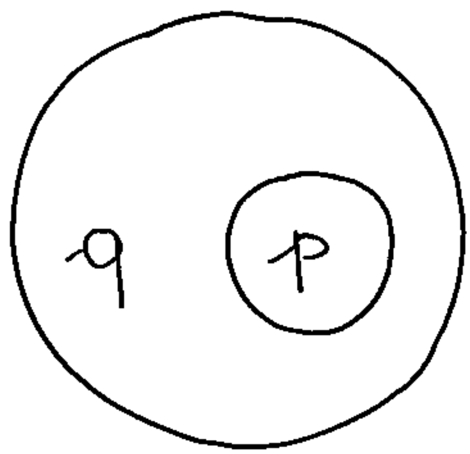
Certo. Ne parlerò subito a proposito di semantica e di tavole di verità. Il contenuto epistemico del condizionale filoniano è chiarito da Kolmogorov. "Il significato di $A \Rightarrow B$ si esaurisce nel fatto che, una volta convinti della verità di A, dobbiamo accettare anche la verità di B. Oppure, nell'interpretazione formalista: se viene registrata una formula A, dobbiamo registrare anche la formula B. Così la relazione di implicazione tra due enunciati non stabilisce alcuna connessione tra i loro contenuti."(A.N. Kolmogorov, *O principe tertium non datur* ,"Matematiceskij sbornik" XXXII, pp. 646-667, trad. V.M. Abrusci in *Dalla logica alla metalogica*, a cura di E. Casari, Sansoni, Firenze, 1979, pp. 167-194). Riprendendo l'esempio della pioggia, dico che la legge di Filone porta ad ammettere ragionevolmente che, *se vale uno dei due casi: o non piove o è bagnato, allora la pioggia implica che ci sia bagnato*.

La giustificazione intuitiva della legge di Filone sta in una variante del *modus ponens*. Il *modus ponens*, che a sua volta fonda tutta la logica transitiva, quella che scarica la verità dalle premesse alle conclusioni, suppone che, se vale *p* e se *p* implica *q*, allora posso dedurre *q* dalla premessa *p*. Il *modus ponens* filoniano suppone che se vale *p* delle due l'una: *o non p o q*, allora dalla premessa *p* posso dedurre *q*. Il ragionamento, forse, è più familiare nella forma: *o p o q*, ma *non p*, allora *q*.

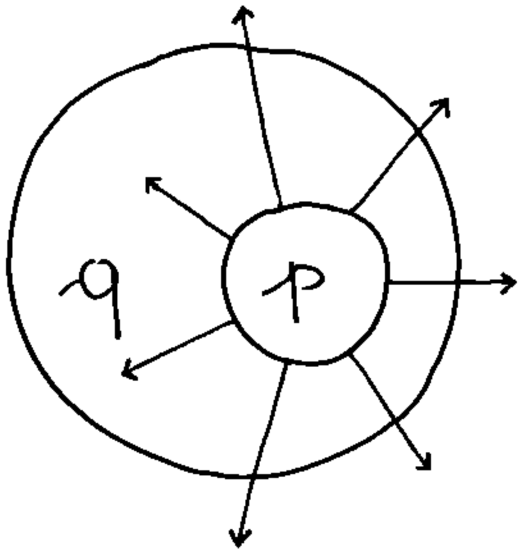
Il punto da non perdere di vista è che grazie alla formula di Filone si può ridurre l'implicazione all'alternativa. Pertanto in logica classica (e perciò nei computer moderni), riducendo l'alternativa alla congiunzione tramite le leggi di de Morgan, si può

ESERCIZIO 1. Esprimere l'implicazione in termini di congiunzione e negazione. (Si raccomanda l'esercizio perché aiuta a comprendere il significato della formula di Filone).

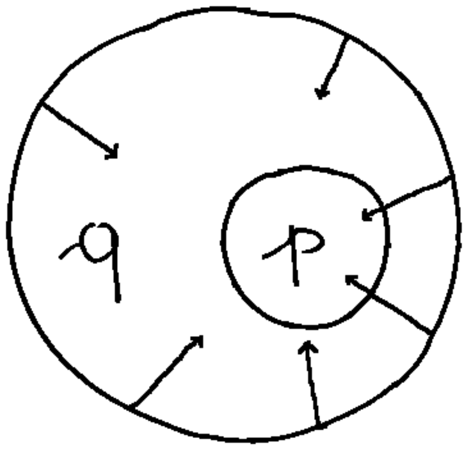
E vengo al significato estensionale. Il significato insiemistico dell'implicazione è l'inclusione. Disegno il diagramma di Venn, dove l'insieme *p* è incluso nell'insieme *q*:



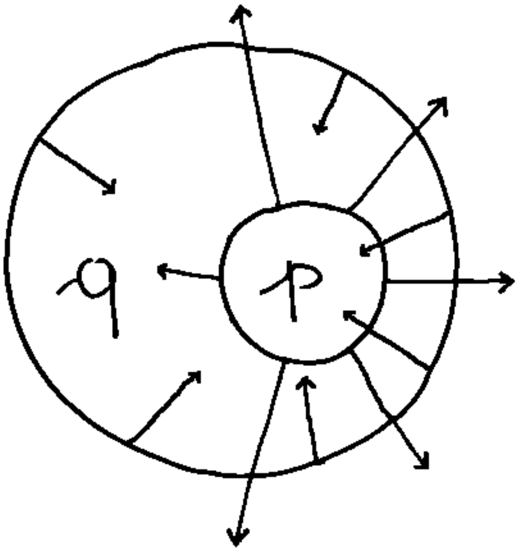
rappresento la negazione come frecce che partono dalla frontiera ed escono dall'insieme. *non p* sarà rappresentato dalle frecce del disegno:



rappresento l'affermazione come frecce che partono dalla frontiera ed entrano nell'insieme. *q* sarà rappresentato dalle frecce del disegno:



Il risultato globale è che ogni area comunque piccola del piano del disegno è ora attraversata dal prolungamento di almeno una freccia orientata in un senso o nel senso opposto.



Se invece di frecce avessi usato un colore, avrei riempito di colore il piano del disegno. Il riempimento rappresenta graficamente la validità universale della formula di Filone. In termini semantici dico che la formula di Filone è una tautologia, cioè è sempre vera. Lo vedremo meglio una volta acquisito l'uso delle tavole di verità. Allora vedremo che la definizione filoniana di implicazione è la più debole che rende vero il *modus ponens*. Siccome il *modus ponens* ha una sua evidenza intuitiva, dovrebbe risultare intuitivamente giustificata anche la concezione filoniana dell'implicazione.

Oggi posso dire che Filone ebbe il merito di intuire la verità della casella all'incrocio della terza riga e della prima colonna della nostra tabella sintattica, consorte della più gettonata casella situata all'incrocio della quarta riga e della seconda colonna. Infatti, già prima di Filone era chiaro che dal vero fosse impossibile dedurre il falso. Era chiaro, cioè, che l'implicazione dovesse essere falsa in un solo caso: se l'antecedente era vero e il conseguente falso, come riportato in tabella. Ma la tabella era bucata in corrispondenza della verità dell'implicazione. Non si aveva un'idea precisa di cosa dovesse fare da *pendant* alla verità. Filone intuì che il complemento del falso non fosse una sola possibilità ma un insieme di diverse possibilità, riassumibili nell'alternativa o l'antecedente non vale o il conseguente vale. Il secondo termine dell'alternativa è intuitivo, mentre il primo è più riposto. Nella nostra scrittura l'alternativa è rappresentata dal raddoppiamento delle parentesi, che indicano la biforcazione della dimostrazione, mentre la validità e la non validità sono rappresentate rispettivamente dalle marche **F** e **V**. La cosa è rappresentata in linea dalla legge di Filone sopra presentata. La cui dimostrazione alla Beth lascio all'

ESERCIZIO 2.

Contro la riduzione forte

Spero che nel discorso appena fatto troviate qualcosa che non vi convince. È vero che vi ho detto che il matematico cerca la semplificazione, ma semplificare troppo fa perdere dettagli preziosi. In questo caso, il ridurre tutto il discorso sintattico alle sole congiunzione e negazione fa perdere la possibilità di analizzare ulteriormente l'implicazione.

Verificatelo. Ridurre tutto a negazione e congiunzione porta a esprimere la legge del terzo escluso *p vel non p* come legge di… non contraddizione: *non*(*p et non p*). Basta applicare le leggi di de Morgan e la legge forte di doppia negazione e il gioco di dimostrare l'equivalenza è fatto. Il vero motivo per cui molto tardi, praticamente solo nel secolo scorso, si arrivò a sospendere la legge del terzo escluso, come legge logica fondamentale, è proprio il fatto che, in contesto classico, terzo escluso e non contraddizione sono principi equivalenti, esprimibili l'uno mediante l'altro. Pertanto, poteva sembrare che il sospendere il principio del terzo escluso portasse a sospendere il principio di non contraddizione, con il conseguente collasso del sistema logico (per la legge *ex falso quodlibet*). Fu Brouwer a intuire la possibilità di scollare il terzo escluso dalla non contraddizione. In un certo senso, sospendendo il terzo escluso, Brouwer difese i diritti di ogni connettivo a non essere schiacciato sull'altro. Infatti, in logica debole non valgono le leggi forti di de Morgan e di Filone, che consentono la riduzione di un connettivo all'altro.

Nella tabella di deduzione che vi ho dato la volta precedente ho trascritto ben dodici regole. Potevo darne solo la metà, quattro per la negazione e la congiunzione e due per i quantificatori, ma mi sono inibito dal semplificare troppo. Nel prossimo indebolimento avrò bisogno di tutte e dodici le regole, naturalmente con una rettifica – l'introduzione di un deponente – che codifichi il passaggio dal binarismo forte a quello debole.

Certezza e verità

D'altra parte, è vero che ho fatto l'elogio del meccanicismo, in nome della sicurezza deduttiva. Da cartesiano sono fautore del meccanicismo delle cause efficienti – meglio per contatto che a distanza – e sono contrario a ogni finalismo, che ritengo estraneo alla scienza e pertinente unicamente alla magia. Da freudiano, inoltre, sostengo il meccanicismo anche nella psiche. La coazione a ripetere è il vero motore dell'inconscio, come lo stesso Freud arrivò a scoprire molto tardi, dopo aver esaurito le versioni ermeneutiche della sua metapsicologica, finalizzate alla soddisfazione del principio di piacere. Ma occorre un granellino di sale. Bisogna sapere bene prima a quale meccanismo il meccanicismo si applica. Tanti difetti imputati dall'idealismo filosofico al meccanicismo positivista erano in realtà fuori bersaglio. In realtà andavano imputati alla povertà dei (supposti) meccanismi cui il meccanicismo si applicava, non al meccanicismo in sé. Il meccanicismo non va applicato in modo meccanico. Ad esempio, il meccanicismo deduttivo – sempre benvenuto – applicato al meccanismo della logica classica e fatto funzionare alla cieca, porta a dimostrare tesi problematiche come la seguente:

$$\vdash (p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p),$$

che si legge: date comunque due proposizioni p e q, *o p implica q o q implica p*. Assurdo? È vero che la tesi si dimostra come tutte le altre tesi classiche, ma è anche vero che la fallacia è un artefatto del binarismo forte della logica classica. Il difetto, quindi, non è del meccanicismo ma del meccanismo. Per coglierne il non senso basta, infatti, interpretare la tesi logica in ambito probabilistico – come è sempre possibile, essendo la logica quella parte del calcolo delle probabilità che assegna alle tesi il valore di probabilità pari a 1. Se, nel lancio di una moneta, si interpretano rispettivamente *p* come *esce testa* e *q* come *esce croce*, allora è chiaro l'inghippo. In nome della logica stoico-aristotelica-booleana si sarebbe portati a dire che o dopo testa esce croce o dopo croce esce testa. Ovviamente nessun bookmaker potrebbe vendere la scommessa a più di uno contro due, una ragione di scommessa un po' inconsueta per un evento certo, come dovrebbe essere un teorema. Il controesempio, tuttavia, non falsifica il meccanicismo ma il meccanismo troppo rigido della logica classica. La quale va "stretta" al calcolo delle probabilità, una delle conquiste acquisite per sempre del pensiero scientifico moderno, un vertice del pensiero matematico alla pari del calcolo infinitesimale. La logica stoica-aristotelica fa fatica a star dietro alle acquisizioni scientifiche. Arrivata alla probabilità, balbetta, quando non dice sciocchezze.

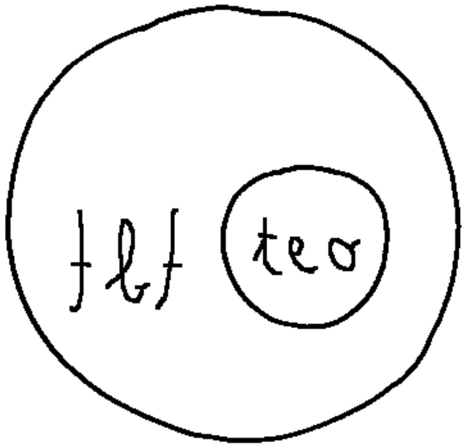
Al di là dell'esempio banale, il punto da cogliere è profondo. Riguarda la divisione tipicamente moderna, risalente a Cartesio e inaugurale del discorso scientifico, tra certezza e verità. Cartesio scrisse, ma lasciò incompiuta, una *Ricerca della verità mediante il lume naturale*. Costituisce la *pars destruens* del suo discorso sul metodo. La verità, se esiste, non sta nel libro, neppure in quello sacro. Ecco l'incipit della *Ricerca* cartesiana: "L'uomo onesto non ha l'obbligo di aver letto tutti i libri". Una nuova etica si annuncia, che non è più deontologica. Cartesio segna la fine della scolastica medievale e pone le basi del futuro freudismo di tre secoli successivo. Il processo di acquisizione della verità del soggetto, tipicamente il processo psicanalitico, non avviene sui libri né si fa per scritto.

Abbastanza stranamente la *pars construens* del metodo cartesiano devia dalla ricerca della verità e piega verso la ricerca della certezza. Cartesio lascia la verità nelle mani del suo dio non ingannatore – la verità, sembra dire nelle sue *Meditazioni metafisiche*, *non* è una faccenda del soggetto della scienza – e si dedica a ciò che era nello spirito del tempo: la ricerca della certezza scientifica. Cartesio non diede contributi diretti al calcolo delle probabilità. Questi furono merito inizialmente di Galilei, che risolse un problema probabilistico di lancio di dadi attraverso il computo esaustivo di tutti i possibili risultati, e successivamente di Pascal e Fermat, che risolsero il problema della divisione della posta in un gioco d'azzardo potenzialmente infinito. Non posso tracciare qui neppure uno schizzo di storia del concetto di probabilità. Ricordo solo che da sempre l'uomo ha trattato eventi incerti, solo probabili, valutandone qualitativamente la frequenza attesa e la convenienza a rischiare denaro su di essi. Sotto la croce la soldataglia romana si giocò a dadi la tunica di Cristo – dettaglio interessante – come procedura di divisione simbolica equivalente alla spartizione reale. (Alla tunica sorteggiata non viene sfilato un filo). Si è sempre usata la probabilità – la parola stessa significa che si fa la prova empirica del risultato – ma prima del discorso scientifico non si è mai fatta la teoria di un oggetto tanto comune come un cubetto di legno che rotola sul tavolo. Trovo singolare che la teoria di questo sapere nel reale, incarnato nel dado, si sia fatta solo in epoca scientifica. Certo, bisognava prima bruciare un bel po' di libri, soprattutto quelli di teologia e di logica classica, per far posto nella biblioteca del sapere moderno all'innovazione epistemica del calcolo delle probabilità. Ancora recentemente, contro la meccanica quantistica che fa giocare in modo essenziale la nozione di probabilità, Einstein protestava che dio non gioca a dadi. Segno che Cartesio non bruciò tutti i libri teologici. A partire dal prossimo seminario, l'indebolimento binario completa l'opera cartesiana, cauterizzando quella parte di logica che porta a formule bizzarre come $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$. Certo, non butto via il bambino insieme all'acqua sporca. Non butto a mare la logica classica, ma la sua corazza fortemente binaria sì, se è vero che porta a controsensi. In termini hegeliani potrei dire che conservo la logica classica, non proprio negandola, ma indebolendola.

Un consistente metateorema

Per parlare di logica bisogna porsi su un piano più alto, che tecnicamente si chiama metalogica, da cui si osserva la logica come oggetto. Per parlare di teoremi bisogna formulare – e dimostrare metateoremi. Tuttavia, la distanza tra matematica e metamatematica, come tra linguaggio e metalinguaggio, è così piccola che si passa facilmente da un piano all'altro senza accorgersene. Oggi fare matematica, dimostrare informalmente teoremi di matematica significa fare metamatematica in una metateoria della teoria mai ben precisata del tutto. La chiarezza e distinzione cartesiane vanno bene come metacriteri teorici, mai del tutto realizzabili. Distinguere il piano logico dal metalogico è chiaro in teoria ma meno in pratica. Sintassi e semantica sono modi metalogici di fare logica, che diventano logici nella pratica. *Se… allora* si trasmuta nel segno di implicazione $\Rightarrow$. La comunicazione tra logica e metalogica diventa ancora più facilmente pervia nei sistemi dotati di alta potenza espressiva, come l'aritmetica. Proprio la possibilità di tradurre proprietà dell'aritmetica all'interno dell'aritmetica – in un certo modo facendo sì che l'aritmetica parli di se stessa metalinguisticamente – ha consentito a Gödel di dimostrare il teorema di incompletezza dell'aritmetica.

Poco fa, dimostrando l'*ex falso quodlibet*, siamo passati accanto a un metateorema senza neppure accorgercene. Abbiamo visto che, se nel sistema emerge una contraddizione, cioè se si può dimostrare una proposizione e la sua negazione, il sistema va in tilt. Lo dico in termini psichiatrici: se a un particolare messaggio *p*, si associa il doppio messaggio *non p*, il sistema diventa schizofrenico. Si dissocia, non distingue più teoremi da non teoremi, ma dimostra tutto e il contrario di tutto. Ogni fbf è un teorema. Diremmo che il sistema soffre di delirio di onnipotenza. Capite come Bleuler abbia potuto fondare il quadro clinico della dissociazione schizofrenica sull'ambivalenza affettiva. Viceversa, se il sistema dimostra tutto, tra i suoi teoremi comparirà anche almeno una contraddizione del tipo *p et non p*. Vedete, allora, la doppia mandata: all'andata dalla contraddizione al tutto e, al ritorno, dal tutto alla contraddizione. Questo metateorema, che pone in equivalenza inconsistenza e totalità di formule dimostrate, permette di definire la *consistenza assoluta* di un sistema logico in funzione del funzionamento globale del sistema. Il metateorema osserva il sistema logico dall'alto e afferma: se la classe dei teoremi coincide con la classe delle fbf, allora il sistema è contraddittorio. Riprendendo la figura dell'inclusione posso rappresentare la situazione fisiologica di un sistema logico così: tutti i teoremi sono fbf, ma non tutte le fbf sono teoremi.



In conclusione, afferma il metateorema: un *sistema logico è assolutamente consistente se e solo se non dimostra tutte le fbf*. Affinché un sistema logico non sia contraddittorio occorre che esista uno scarto tra capacità espressiva e capacità dimostrativa. Non tutto ciò che può essere espresso può essere dimostrato. In un certo senso il metateorema è banale. Forse non valeva la pena ricordarlo. Ma a me serve in questo contesto da differenza nella procedura dimostrativa. Il teorema *ex falso quodlibet* si dimostra in modo meccanico con una delle tante procedure formalizzate disponibili, da Frege in poi. Il metateorema *ex falso quodlibet* si dimostra in modo informale, utilizzando il precedente e altre considerazioni intuitivamente valide, ma non del tutto meccanizzate. Con i metateoremi la libertà dimostrativa riprende i propri diritti apparentemente conculcati dalla formalizzazione della sintassi.

Da qui si diparte una serie di ricerche metalogiche sulle classi massimali di proposizioni, cioè classi consistenti ma tali che, se si aggiunge a esse una fbf che non sia un assioma, diventano inconsistenti. Il sistema proposizionale classico è massimale. Le classi massimali servono a dimostrare la completezza della logica. Tornerò sull'argomento quando mi affaccerò al problema dell'incompletezza dell'aritmetica. L'aritmetica è incompleta perché non dimostra almeno una proposizione. L'aritmetica, in particolare, è assolutamente consistente, perché non può dimostrare la propria consistenza. La metatesi purtroppo non dimostra la consistenza assoluta dell'aritmetica perché a sua volta si dimostra – forse questo vi farà arrabbiare – supponendo la consistenza dell'aritmetica.

Forse ho insistito un po'troppo sui questi metateoremi, non perché siano importanti in sé ma, primo, per diminuire la comprensibile soggezione che incutono teoremi "più grandi", e, secondo, per farvi notare che si dimostrano in modo un po' meno meccanico dei teoremi oggetto. Si dimostrano in modo informale, emulando – come si dice in computerese – il modo assolutamente meccanico delle dimostrazioni formalizzate. In realtà – questo può solo far piacere agli antimeccanicisti – il modo informale preesiste a quello formale, che mutua il proprio rigore da quello, semplificandolo e, appunto, meccanizzandolo nei limiti del sogno leibniziano.

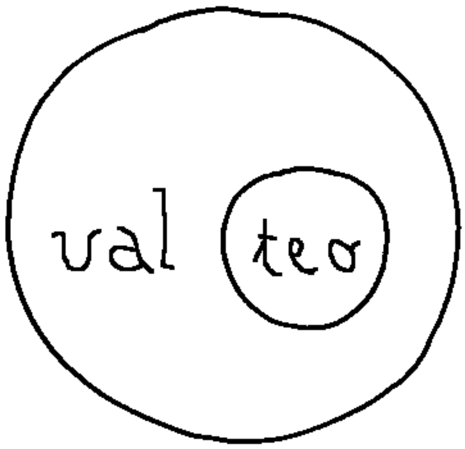
Finisce qui, allora, il *Calculemus*? Sì e no. Ora comincia la semantica, che in fondo è ancora un calcolo, seppure un po' meno rigido – ma poco – di quello sintattico.

Tra sintassi e semantica: riflessione sui termini

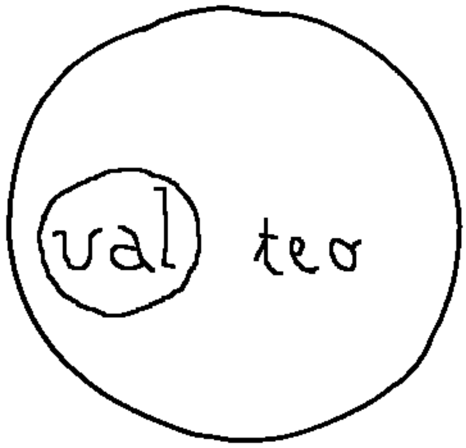
Finora ho usato i termini "sintassi" e "semantica", non dico in modo ingenuo, ma senza precisarne il senso, lasciando che esso emergesse dall'uso. Non è un cattivo modo di procedere, a patto di fermarsi dopo un po' a riflettere. Dei due termini "sintassi" è quello che incorpora maggiormente il significato di "processo meccanico di calcolo". L'assetto sintattico prevede dei punti di partenza – gli assiomi – delle regole di trascrizione, e dei punti di partenza – i teoremi. Tra assiomi e teoremi stanno le catene dimostrative (finite!) o semplicemente dimostrazioni.

E la semantica? Tradizionalmente "semantica" significa teoria del significato. In matematica questa accezione si indebolisce. Non esiste un'unica teoria del significato, ma tante. In linea di massima la semantica convoca la verità. Ma proprio in riferimento alla verità emerge la caratteristica essenziale dell'indebolimento. Come in matematica esistono verità algebriche, topologiche e insiemistiche (scritte in ordine di indebolimento), così in logica esistono semantiche algebriche (Boole), topologiche (Tarsi, Beth) e insiemistiche (da Gödel a Kripke). Alla domanda: *cos'è la semantica?* Risponderei: Niente di meno che tutta la matematica che non si lascia esprimere in forma algoritmica, ossia sotto forma di calcolo. Tutte le citate varianti della semantica riflettono in modi diversi la verità della sintassi, che, lei sì, si lascia formulare in modi algoritmici.

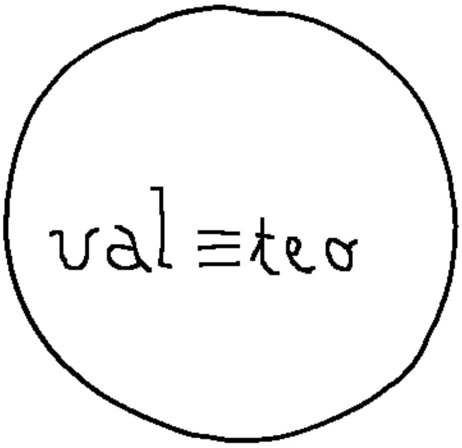
Ultimamente sintassi e semantica sono due modi non molto diversi di fare logica. E questo è tipico della logica. Infatti, alla fine del seminario odierno arriverò a dimostrare in modo informale e schematico il metateorema che stabilisce la loro equivalenza, almeno finché non si esce dalla logica. (Meta)dimostrerò che tutto ciò che si dimostra in sintassi è vero in semantica e tutto ciò che è vero in semantica si dimostra in sintassi. In termini insiemistici, la classe dei teoremi coincide con la classe delle verità logiche o universalmente valide. La dimostrazione del (meta)teorema si spaccherà in due sottoteoremi: teorema di validità, o tutto ciò che si dimostra è valido, graficamente:



e teorema di completezza, o tutto ciò che è valido si dimostra, graficamente:



In sintesi,



L’obiezione di chi non sa né leggere né scrivere è: “perché distinguere, se poi si dimostra che i due termini della distinzione coincidono?” La risposta, lo ripeto, è che coincidono in questo caso. Non coincidono nella generalità dei casi, per esempio in aritmetica. In altri termini, la distinzione tra semantica e sintassi non è operativa in logica, ma è operativa in aritmetica. Tanto basta a mantenerla.

Lo stesso concetto si può formulare in termini di *ars inveniendi* e *ars judicandi*, secondo Leibniz, o contesto di ricerca e contesto di giustificazione, secondo Reichenbach. In logica non c’è differenza tra i due contesti: quel che scopro in semantica, lo giustifico in sintassi; viceversa, di quel che dimostro in sintassi posso dare una classe di modelli semantici, che in un certo senso “visualizzano” la verità astratta della sintassi. In aritmetica, la distinzione funziona: quel che scopro in semantica non è detto che riesca a giustificarlo in sintassi. In aritmetica, insomma, non esiste una sintassi tanto potente da ricoprire tutto il campo della verità. La controprova empirica di quanto sto dicendo è che la teoria dei numeri pullula di congetture indimostrate, cioè verità supposte ma non giustificate, mentre non sono a conoscenza di congetture logiche “in attesa di giudizio”. Una ragione di più per procedere a indebolire il logocentrismo e assumere in materia di verità un atteggiamento pragmatico. Lo dice bene William James nella sua VI conferenza sul pragmatismo: *True ideas are those that we can assimilate, validate, corroborate and verify. False ideas are those we cannot*. Il vero è ciò che di volta in volta si dimostra vero, al di là di astratte garanzie aprioristiche di corrispondenza tra idea e cosa. Ci ritornerò quando, introducendo l’indebolimento, romperò la simmetria tra vero e falso via negazione. Il vero non è solo il contrario del falso e il falso è più che il contrario del vero.

A proposito di semantica

Ho già detto che la differenza tra sintassi e semantica è piccola. Lo confermo ma aggiungo che è fondamentale e ineliminabile. Anche quando la differenza tra sintassi e semantica scompare in estensione, come nel caso dell'equiestensione tra la classe dei teoremi e classe delle verità logiche, essa permane in intensione, cioè a livello del concetto. Il punto è che la semantica ha a che fare direttamente con la verità, la sintassi no o solo indirettamente (passando attraverso il metalinguaggio). L'estraneità della sintassi alla dimensione aletica o veritativa è ben evidenziata dal metodo sintattico di Beth che usa le marche di verità come marche metalinguistiche da applicare alle formule dall'esterno. Per la sintassi la verità è una dimensione che non appartiene al linguaggio ma al metalinguaggio. In un certo senso viene prima del linguaggio. Lo mette bene in evidenza la scrittura di Beth, collocando la marca di verità a sinistra della formula, cioè prima della formazione linguistica. La semantica fa l'operazione opposta: sposta la verità a destra della formula, trasformandola in suo argomento. Non scrive più $\mathbf{F}\alpha$ o $\mathbf{V}\alpha$ ma $\alpha(\mathbf{F})$ o $\alpha(\mathbf{V})$. Il risultato è che le formule, *variabili comprese*, diventano funzioni, precisamente diventano funzioni di verità: $\alpha(\mathbf{F})$ può essere vera o falsa, $\alpha(\mathbf{V})$ può essere vera o falsa. In termini di teoria delle funzioni le formule logiche applicano l'insieme prodotto dei valori di verità, $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}^n$, cioè l'insieme delle n-ple binarie dei valori di verità, sull'insieme dei valori di verità $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$. In pratica la semantica è formata dalle seguenti applicazioni (suriettive, nel senso che ogni elemento dell'insieme dei valori – a destra della freccia – è immagine di qualche elemento dell'insieme degli argomenti – a sinistra della freccia):

$\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\} \rightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$,
$\{\mathbf{VV}, \mathbf{VF}, \mathbf{FV}, \mathbf{FF}\} \rightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$,
$\{\mathbf{VVV}, \mathbf{VVF}, \mathbf{VFV}, \mathbf{VFF}, \mathbf{FVV}, \mathbf{FVF}, \mathbf{FFV}, \mathbf{FFF}\} \rightarrow \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$.
…

ESERCIZIO 3. Quante sono le funzioni suriettive da $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}^n$ a $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$?

Al loro interno i campi sintattico e semantico sono omogenei. La sintassi è formata solo da formule marcate, la semantica solo da funzioni di verità. Ciò permette di istituire un parallelo tra le dinamiche di calcolo attive nei due campi. In pratica i processi di calcolo – gli algoritmi – si svolgono nei due campi in direzioni opposte. La sintassi procede dall'alto in basso. Semplifica, va dal complesso al semplice, dalla formula alle variabili, più precisamente, dai valori di verità delle fbf, poste alla radice dell'albero deduttivo (capovolto!), a quelli delle singole variabili, nelle foglie terminali dell'albero (supposto finito nel caso in cui tutte le foglie si chiudano con una contraddizione). La semantica procede in senso inverso, dal basso verso l'alto, dalle foglie alle radici. Complessifica, va dal semplice al complesso, dalle variabili alla formula. Assegna valori di verità alle variabili e, a partire da questi, determina quelli delle fbf. Schematicamente:

Sin	$\mathbf{F}/\mathbf{V}\alpha$	$\mathbf{F}/\mathbf{V}\alpha$	Sem
tas	$\downarrow$	$\uparrow$	anti
si	$\mathbf{F}/\mathbf{V}p$, $\mathbf{F}/\mathbf{V}q$…	$\mathbf{F}/\mathbf{V}p$, $\mathbf{F}/\mathbf{V}q$…	ca

La determinazione dei valori di verità a partire dagli argomenti delle funzioni di verità ubbidisce a precise regole. Anche in semantica ci sono regole come in sintassi. Non si chiamano regole deduttive (o di inferenza) come in sintassi, ma sono regole a tutti gli effetti, di cui parlerò tra poco. Il punto da ritenere è che neppure con la semantica si esce dal meccanicismo. Già queste similitudini e affinità lasciano prevedere la possibilità concreta di dimostrare che i due metodi siano equivalenti, almeno in logica. È piuttosto sorprendente, quindi, che i due metodi non coincidano in aritmetica, come vi ho già annunciato. Ma ecco i dettagli operativi del metodo semantico.

La verità servita in tavola

Il metodo semantico fa intervenire direttamente la verità, dicevo. Pone i valori di verità come argomenti delle funzioni logiche, attribuendo a queste un valore di verità che dipende da quelli. Secondo certe regole. Eccole.

La volta scorsa ho distinto gli operatori in due categorie: connettivi e quantificatori. Comincio dalle regole che riguardano i connettivi. Hanno un nome. Si chiamano tavole di verità, perché si possono esprimere, come la tabellina pitagorica – la lingua batte… – con un numero finito di righe e di colonne. La loro formulazione risale al Wittgenstein del *Tractatus* del 1918. Siccome i connettivi sono quattro, devo darvi almeno quattro tavole di verità, una per ciascun connettivo.

Comincio dal connettivo più semplice, che non connette nulla, essendo unario: la negazione. La negazione di *p* è una funzione inversiva, nel senso che non lascia le cose a posto. Infatti, a ogni valore di *p* assegna un valore diverso dal valore corrente di *p*. Siccome i valori di verità sono solo due, la negazione assegna al vero il valore falso e al falso il valore vero. La negazione non può far altro che scambiare il vero con il falso e il falso con il vero. La tavola di verità è la seguente:

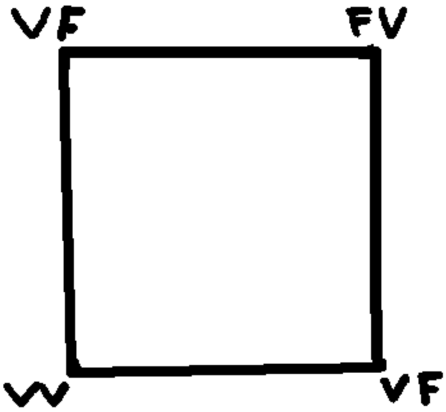
$\neg$	p
F	**V**
V	**F**

Come si verifica facilmente, la negazione è involutoria, cioè applicata due volte all'argomento restituisce l'argomento, ma non ha punti fissi, cioè non ha valori che coincidano con l'argomento. Insomma, semanticamente parlando, la negazione serve per cambiare argomento. (Per curiosità, esistono in semantica funzioni unarie con punti fissi? La risposta è sì, tutte le altre, la funzione identità e le funzioni costanti, che tuttavia non si usano in pratica).

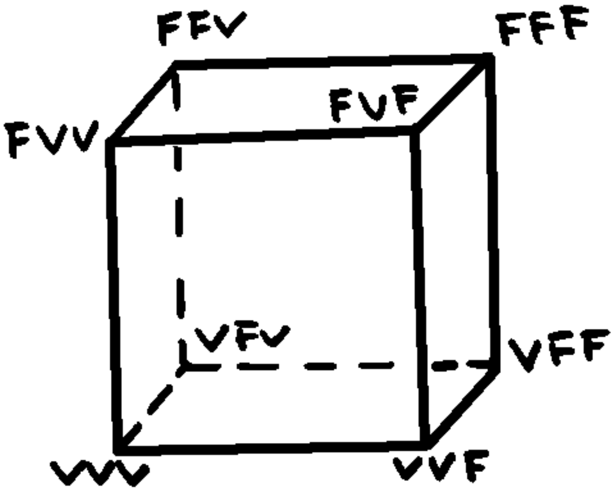
Già la semplice presentazione della tavola di verità evidenzia la validità della doppia negazione. Essa consegue dal fatto che la funzione di negazione è involutoria, come si dice in matematica. Il falso diventa vero, per la prima negazione, e il vero torna a essere falso, per la seconda negazione. Analogamente, partendo dal vero, si ottiene prima il falso e poi il vero. In ogni caso *p* mantiene i valori di partenza. La doppia negazione coincide con l'identità perché fa tornare all'argomento di partenza. Sulla tavola di verità si verifica, infine, il funzionamento meccanico del calcolo delle funzioni di verità. Il meccanicismo semantico non ha nulla da invidiare a quello sintattico.

Il meccanicismo dà sicurezza. Sembra istituire un procedimento oggettivo, al riparo dalle bizzarrie e dagli arbitrii decisionali del soggetto. Ma attenzione! L'equazione "oggettivo = senza soggetto" va presa con le molle. Essa consegue, come artefatto ideologico, alla diatriba ottocentesca tra positivismo e idealismo. Giustamente i positivisti non ne volevano sapere del soggetto assoluto hegeliano, lo Spirito, perché troppo metafisico. Giustamente gli idealisti contestavano ai positivisti la riduzione a necessità della libertà del soggetto. Purtroppo due giustizie, cumulate insieme, possono fare un torto. Nel caso non rendono giustizia al soggetto della scienza, che opera esclusivamente all'interno del meccanicismo, dove però è libero di inventare meccanismi diversi, nessuno privilegiato metafisicamente sull'altro. In questi primi seminari ne ho presentati già due: quello sintattico e quello semantico. Ce ne sono tanti altri, di cui vi ho fatto grazia: quello algebrico e quello topologico. Nel prossimo seminario sposterò la lente del meccanicismo sull'inconscio, di cui metterò a fuoco alcuni meccanismi. D'altra parte, come già visto nel caso probabilistico, la funzione del soggetto – del suo giudizio – è ineliminabile nel valutare il funzionamento del meccanismo. Tutto dipende dall'*ars inveniendi* nonché *judicandi* del soggetto, le due nuove arti epistemiche dell'epoca scientifica. Infatti, in epoca classica e medievale non c'era nulla da *invenire* (inventare), perché tutto era già scritto nel libro, già giustificato dalla parola del maestro e dei suoi interpreti ortodossi, appartenenti a chiese e scuole.

Procedo con il mio meccanicismo affrontando le tavole di verità dei connettivi binari. Ora, le variabili essendo due, la tavola è più estesa, perché deve far posto a 2×2 = 4 combinazioni. Ognuna è una coppia ordinata di valori di verità e corrisponde a un vertice del quadrato binario $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}^2$:



Con tre variabili avrei 2×2×2 = 8 combinazioni. Ognuna è una terna ordinata di valori di verità e corrisponde a un vertice del cubo binario $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}^3$:



La tabella cresce esponenzialmente con il numero delle variabili. Con n variabili si hanno 2^n righe. Per fortuna ci si può limitare ai connettivi binari. Tutte le funzioni di verità, come già visto in sintassi, si possono ricondurre al calcolo di due funzioni, di cui una sia la negazione.

La tavola di verità dell'alternativa è la seguente:

∨	*p*	*q*
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
V	**V**	**F**
F	**F**	**F**

La funzione "alternativa" (*vel*) calcola il valore falso se entrambi gli argomenti sono falsi, altrimenti assegna di *default* il valore vero.

∧	*p*	*q*
V	**V**	**V**
F	**F**	**V**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

La funzione "congiunzione" (*et*) è duale dell'alternativa: calcola il valore vero se entrambi gli argomenti sono veri, altrimenti assegna di *default* il valore falso.

⇒	*p*	*q*
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**F**
V	**F**	**F**

Secondo Filone la funzione "implicazione" (*seq* o condizionale) calcola, come già sappiamo, il valore falso se la prima variabile (l'antecedente) è vera e la seconda variabile (il conseguente) è falsa, altrimenti assegna di *default* il valore vero. Ritroviamo qui quanto già annunciato a livello sintattico a proposito del *modus ponens*. La tavola di verità del condizionale è quella che forza il *modus ponens* a esser vero sotto il minor numero di condizioni. Infatti, basta cancellare una sola riga – la terza, quella in cui l'antecedente è vero e il condizionale falso – perché il *modus ponens* sia sempre vero.

Le buone maniere a tavola

Come e perché si usano le tavole di verità? Si usano per verificare quale dei seguenti casi si verifica: se una formula è una tautologia, una contraddizione o una contingenza. Le definizioni sono le seguenti. Una formula sempre vera si chiama, secondo Wittgenstein, *tautologia*; una sempre falsa si chiama *contraddizione*; una a volte falsa e a volte vera si chiama *contingenza*. Per esempio, sono contingenze le congiunzioni e le alternative.

Do la terminologia di uso più frequente. Una o più combinazioni di valori delle variabili proposizionali si chiama *modello* della formula se le assegnano il valore vero. Si chiama *contromodello* se le assegnano il valore falso o, equivalentemente, se assegnano il valore vero alla negazione. Per esempio le assegnazioni di valori della prima, seconda e terza riga della tavola di verità (o loro sottoinsiemi) sono modelli per l'alternativa. Analogamente, la prima riga della tavola di verità è un modello per la congiunzione; tutte le altre sono contromodelli. Ma né l'alternativa né la congiunzione sono tautologie. Una tautologia è una proposizione *valida* (o logicamente vera), cioè tutte le combinazioni di valori sono suoi modelli. In altri termini, comunque si assegnino valori alle variabili, nella tautologia si ottiene sempre lo stesso risultato… tautologico: il vero. Una contingenza è *soddisfacibile* perché ha almeno un modello. Una contraddizione non è soddisfacibile perché non ha modelli, cioè comunque si assegnino valori alle variabili, si ottiene sempre solo un risultato: il falso. Le contraddizioni sono duali delle tautologie, le une sempre vere, le altre sempre false; le une hanno solo modelli, le altre solo contromodelli.

"Ci siamo già passati", disse la Regina di Cuori ad Alice. Abbiamo già inconsapevolmente usato contromodelli in sintassi. Nelle dimostrazioni per assurdo, si falsificava la fbf, andando alla ricerca di contromodelli. Invece di contromodelli si trovavano solo contraddizioni. Questo portava a concludere che non esistevano contromodelli ma solo modelli e, quindi, che la fbf era una tautologia. Essendo in ambito sintattico, dicevamo che la formula era un teorema. Di riferimenti incrociati tra sintassi e semantica ne farò ancora senza più segnalarli. Alla fine saranno codificati nel (meta)teorema di completezza, che sancisce l'equivalenza tra algoritmo sintattico e semantico.

Verifichiamo, a mo' di esempio, che la legge debole di Filone è una tautologia, cioè che tutte le assegnazioni di valori alle variabili proposizionali la verificano o sono suoi modelli. Organizziamo il calcolo in una tabella, come per lavorare su un foglio di *Excel*. La prima riga contiene la formula, le altre i valori di verità assegnati o calcolati. Assegno innanzitutto i valori delle variabili in tutti i modi possibili (c'è un algoritmo semplice per farlo):

$(\neg$	p	$\vee$	$q)$	$\Rightarrow$	$(p$	$\Rightarrow$	$q)$

	V		**V**		**V**		**V**
	F		**V**		**F**		**V**
	V		**F**		**V**		**F**
	F		**F**		**F**		**F**

Al secondo passo calcolo il valore dei connettivi unari, cioè le negazioni. Per chiarezza il foglio di *Excel* cancella automaticamente i valori della variabili già calcolate:

(¬	*p*	∨	*q*)	⇒	(*p*	⇒	*q*)
F			**V**		**V**		**V**
V			**V**		**F**		**V**
F			**F**		**V**		**F**
V			**F**		**F**		**F**

Al terzo passo mi dedico ai connettivi binari, cominciando da quelli nelle parentesi più interne e terminando con quelli più esterni:

(¬	*p*	∨	*q*)	⇒	(*p*	⇒	*q*)
F		**V**	**V**		**V**		**V**
V		**V**	**V**		**F**		**V**
F		**F**	**F**		**V**		**F**
V		**V**	**F**		**F**		**F**

La pratica semantica è tanto noiosa quanto la sintattica. "La noia non inganna", diceva qualcuno. Se hanno in comune la noia, sintassi e semantica rischiano di avere molto altro in comune, forse tutto. Continuiamo:

(¬	*p*	∨	*q*)	⇒	(*p*	⇒	*q*)
		V			**V**	**V**	**V**
		V			**F**	**V**	**V**
		F			**V**	**F**	**F**
		V			**F**	**V**	**F**

(¬	*p*	∨	*q*)	⇒	(*p*	⇒	*q*)
		V		**V**		**V**	
		V		**V**		**V**	
		F		**V**		**F**	
		V		**V**		**V**	

Poiché il risultato è una colonna di **V** concludo che Filone era proprio un filone: scoprì una legge logica fondamentale, una tautologia direbbe Wittgenstein, per dire che il *logos* è universalmente vero quando coincide con se stesso (*tautos*) e non qualche altra realtà. Alcune parole a commento. Innanzitutto, si dimostra che in logica classica la legge di Filone è un'equivalenza, cioè un bicondizionale o condizionale nei due sensi. Non ho dato la tavola del bicondizionale (⇔) perché è un connettivo ausiliario, che è vero quando i valori delle due variabili sono uguali e falso altrimenti. Calcolarne la tavola per

ESERCIZIO 4.

In questo caso le ultime due colonne del calcolo sono uguali, quindi soddisfano il bicondizionale.

Diversamente dal caso della falsità – conseguente falso con antecedente vero – la verità dell'implicazione presenta alcuni paradossi o come, preferisco dire, pseudoparadossi. Ovviamente non è paradossale che il vero implichi il vero. I paradossi nascono nell'implicazione dal falso, che proprio l'indebolimento binario metterà al centro della sua operazione.

Contro gli pseudoparadossi

La divagazione per ammorbidire l'aridità del calcolo logico.

I paradossi veri sono pochi. Si contano sulla dita di una mano. Arrivo a contarne due: il paradosso aletico di Epimenide ("Io mento") e il paradosso etico di Kierkegaard ("Sono libero, se scelgo"). Gli altri sono pseudoparadossi: sterili esercizi di intelligenza meccanica – non meccanicistica! – e falsamente brillante, che non hanno alcun rapporto con qualche pratica effettiva. I paradossi del movimento di Zenone, quello di Achille e la tartaruga o della freccia ferma, non hanno fatto avanzare di un passo la fisica per duemila anni. I paradossi del doppio legame ("Sii spontaneo"), che promettevano risultati nella psicoterapia delle schizofrenie attraverso i controparadossi, si sono rivelati per quel che erano: artefatti del binarismo forte. Quando si forza la verità in camicie di forza troppo strette spuntano gli pseudoparadossi.

Analizzando lo pseudoparadosso paradigmatico del doppio legame: "Sii spontaneo", è facile verificare che equivale a un *modus tollens*. "Se te lo ordino io, tu devi essere spontaneo. Ma tu non puoi più essere spontaneamente spontaneo, perché te l'ho ordinato io. Quindi, per *modus tollens*, il mio ordine è falso". Sento già l'obiezione. Un ordine non è una variabile proposizionale che possa assumere valori di verità vero o falso. Un ordine è un ordine. Ok. Nel "sii spontaneo" l'ordine non è un ordine, quindi è falso dire che sia un ordine. È, infatti, un falso ordine.

Ma la falsità non intacca minimamente il valore d'uso di un enunciato, ancor meno il valore di scambio di un'enunciazione. Abbiamo qualcosa contro la falsità? Polonio l'apprezzava. Usava l'esca della menzogna per pescare la carpa della verità. Lo psicanalista, poi, dovrebbe dimostrarsi tollerante verso il falso. Lui lavora dalla mattina alla sera con la falsità del transfert. Lo dice Freud alla fine degli *Studi sull'isteria*. "Il transfert sul medico è un falso nesso". La teoria lacaniana va a fondo della falsità del transfert. Pone che esso cominci con una congettura chiaramente falsa: l'istituzione del soggetto supposto sapere. L'analizzante suppone che qualcuno, per esempio l'analista, sappia qualcosa del desiderio inconscio che lo fa soffrire. Con questa falsa supposizione comincia l'analisi che, se arriva a termine, produrrà un sacco di verità. Addirittura l'analisi termina quando la falsa supposizione decade: è la liquidazione del transfert.

Ma prima di Freud e di Lacan lo diceva già lo stoico Filone: dedurre il vero da falso non solo è possibile, ma produce vere e proprie implicazioni. Altro che pseudoparadossi! Qualcosa della meraviglia per il luccichio degli pseudoparadossi torna nel vecchio Lacan che, commentando l'implicazione materiale di Filone, nel seminario XX si lasciava andare a dire che essa è *bien foutue* perché deriva il vero dal falso. Non solo deriva il vero dal falso, ma anche il falso dal falso, l'implicazione. È l'implicazione vuota, che non fa problema al matematico. Insomma dal falso si può correttamente derivare tutto, sia il vero sia il falso, come sappiamo dall'*ex falso quodlibet*. Ma Filone lo sapeva prima dei medievali.

Quindi attenzione agli pseudoparadossi! Sono artefatti di una tecnica logica non ben disciplinata. Nascono quando alla logica si chiede troppo, più di quel che può dare. Il logocentrismo è una pericolosa forma d'amore filosofico. È l'amore per l'ortodossia, cioè per la retta opinione. Platone fa dire a Teeteto questa definizione di ortodossia: *doxa alethés metà logou*, "opinione di verità al di là della (o tramite la) parola" (*Teeteto*, 201d). Il rischio è che a furia di andare al di là della parola, l'ortodossia diventa paradossalmente violenza logocentrica o centrata sul *logos*.

Il bidello di Golgi

A proposito della debolezza intellettuale di chi si innamora dei propri strumenti di lavoro, *logos* compreso, mi piace ricordare una storiella, probabilmente falsa, che circolava negli ambienti di anatomia normale che frequentavo da giovane.

Il grande Camillo Golgi, anatomico di Pavia, guadagnò insieme a Ramon y Cajal, il Nobel per la medicina, grazie alla colorazione argentica con cui studiava l'istologia del sistema nervoso. Forse non lo sapete, perché in tempi di microscopio elettronico non si usa più, ma – come ben sapeva Freud che l'applicava – la reazione di precipitazione argentica è capricciosa. Spesso non riesce e il preparato istologico appare sotto il microscopio uniformemente bianco. Altre volte riesce troppo e il vetrino appare uniformemente nero. Ogni tanto, in dipendenza dallo stato di ossido-riduzione del tessuto, riesce e i risultati vanno interpretati: il sistema nervoso costituisce un sincizio di cellule che confluiscono l'una nell'altra o è un tessuto di cellule distinte che si articolano in punti precisi? Rispondi e vinci il Nobel. (Pare che anche Freud sapesse la risposta giusta, ma non vinse alcun Nobel). Ma Golgi volle strafare. Pretendeva un secondo Nobel per la sua teoria che i globuli rossi avessero un nucleo. Come faceva a dirlo? Semplice. Colorava con l'argento uno striscio di sangue e vedeva che le emazie avevano un puntino nero al centro: il nucleo. Inutilmente i suoi assistenti tentavano di dissuaderlo dal propalare la teoria. Fortuna che alle riunioni scientifiche partecipava anche il bidello dell'istituto. Voi non sapete quale livello intellettuale e quale competenza tecnica raggiungessero i bidelli di anatomia un secolo fa. Il bidello chiese educatamente al direttore di fare un esperimento. Concesso. Prese un batuffolo di cotone. Lo imbevve di benzolo e l'incendiò. Sulla fiamma annerì una ciotola di ceramica refrattaria. Poi pipettò un po' di benzolo e lavò la ciotola. Fatto questo, la consegnò al direttore. Che vide la ciotola pulita con un grumo nero in fondo.

Cos'era successo? Il benzolo aveva staccato il nerofumo dalle pareti della ciotola e il carbonio puro era precipitato sul fondo, esattamente come l'argento del professor Golgi, che precipitava al fondo dei globuli rossi. I quali hanno la forma di lenti biconcave, lo sanno anche i bambini. La storiella ha una morale epistemica. Il soggetto della scienza sa riconoscere gli artefatti che introduce nel reale attraverso le proprie tecniche. Non li scambia per realtà, come precipitosamente afferma certo cognitivismo ingenuo. *Idem* per la logica. I paradossi sono artefatti introdotti nel reale dal binarismo forte. Riconoscerli vuol dire predisporsi a indebolirlo.

Torna l'assurdo

Date le tavole di verità, si dimostrano teoremi o leggi, che ora – essendo l'approccio non sintattico, ma semantico – si chiamano tautologie o proposizioni valide. Ho fatto vedere come si fa nel caso della tautologia di Filone. Potete per esercizio completare la dimostrazione semantica del metateorema della riduzione dei quattro connettivi a due, mostrando che le leggi di de Morgan sono tautologie. A me ora preme prendere un'altra strada.

C'è un procedimento alternativo alle tavole di verità per dimostrare che una fbf è una tautologia. È un procedimento che conoscete già: il procedimento per assurdo, già usato nel caso sintattico. Tanto simile a quello che non insisterò oltre sulle analogie. Quando si usa? In pratica quando la tavola è troppo grande. Come sapete, le tavole di verità crescono rapidamente. Di fronte a una formula con dieci variabili dovrei costruire una tabella di più di mille righe ($2^{10} = 1024$). Un po' scomoda da trattare senza un computer. (Oggi il computer è diventato indispensabile nelle dimostrazioni combinatorie del tipo di quelle necessarie a dimostrare il teorema dei quattro colori). La scorciatoia è il metodo per assurdo. Vi do l'esempio di Carnap. Vedrete che la differenza con la dimostrazione sintattica è minima. In sintassi si procedeva in verticale, qui in orizzontale. Anche in questo caso preparo un foglio di *Excel* sulla cui prima riga scrivo la formula, nella speranza di cavarmela con poche righe, almeno non più di otto, essendo le variabili proposizionali tre. Come Carnap uso questa volta anch'io lettere maiuscole latine per le variabili proposizionali. Scrivo la formula con un **F** sotto il connettivo più esterno:

(A	$\Rightarrow$	($\neg$	B	$\Leftrightarrow$	C))	$\Rightarrow$	((A	$\wedge$	C)	$\Rightarrow$	$\neg$	B)
						F						

Come al solito inauguro il contesto di giustificazione falsificando il condizionale con la verità dell'antecedente e la falsità del conseguente:

(A	$\Rightarrow$	($\neg$	B	$\Leftrightarrow$	C))	$\Rightarrow$	((A	$\wedge$	C)	$\Rightarrow$	$\neg$	B)
						F						
	V									**F**		

Conviene lavorare sulla falsificazione dell'implicazione, che è univoca:

(A	$\Rightarrow$	($\neg$	B	$\Leftrightarrow$	C))	$\Rightarrow$	((A	$\wedge$	C)	$\Rightarrow$	$\neg$	B)
						F						
	V									**F**		
								V			**F**	

La verità della congiunzione mi obbliga a scrivere la verità dei congiunti. Poiché in questo caso i congiunti sono variabili proposizionali, trascrivo lo stesso valore sotto ogni occorrenza delle stesse variabili nella fbf:

(A	$\Rightarrow$	($\neg$	B	$\Leftrightarrow$	C))	$\Rightarrow$	((A	$\wedge$	C)	$\Rightarrow$	$\neg$	B)
						F						
	V									**F**		
								V			**F**	
V					**V**		**V**		**V**			

Ho da calcolare la negazione di B, che essendo falsa forzerà B a essere vera in ogni sua occorrenza:

(*A*	⇒	(¬	*B*	⇔	*C*))	⇒	((*A*	∧	*C*)	⇒	¬	*B*)
						F						
	V									**F**		
								V			**F**	
V					**V**		**V**		**V**			
			V									**V**

Coerentemente anche la seconda negazione di *B* è falsa:

(*A*	⇒	(¬	*B*	⇔	*C*))	⇒	((*A*	∧	*C*)	⇒	¬	*B*)
						F						
	V									**F**		
								V			**F**	
V					**V**		**V**		**V**			
			V									**V**
		F										

A questo punto posso calcolare il valore del bicondizionale, che è falso, essendo i valori dei suoi termini diversi:

(*A*	⇒	(¬	*B*	⇔	*C*))	⇒	((*A*	∧	*C*)	⇒	¬	*B*)
						F						
	V									**F**		
								V			**F**	
V					**V**		**V**		**V**			
			V									**V**
		F										
				F								

Ho riempito tutte le colonne con un valore di verità. Mi chiedo se complessivamente i valori sono coerenti. Avendoli tutti a disposizione, posso fare la verifica. Mi muovo ora in un contesto di giustificazione della giustificazione. Devo mobilitare doppiamente le risorse dell'*ars judicandi*. Da dove comincio i test? Dai valori più precocemente acquisiti. Il primo è il falso della falsificazione. Sta in piedi fino a prova contraria. Sulla seconda riga trovo un vero e un falso. Il falso passa il test, perché è il falso di un'implicazione i cui termini sono rispettivamente vero e falso. Ma il vero non passa il test, perché è il vero di un'implicazione che ha sotto di sé rispettivamente un vero e un falso, il che non può essere secondo la tabella di Filone. Devo correggere il calcolo e scrivere "falso" come vuole Filone:

(A	$\Rightarrow$	($\neg$	B	$\Leftrightarrow$	C))	$\Rightarrow$	((A	$\wedge$	C)	$\Rightarrow$	$\neg$	B)
						F						
	V									**F**		
								V			**F**	
V					**V**		**V**		**V**			
			V									**V**
		F										
				F								
	F											

Ma la correzione introduce una contraddizione. Per il principio di bivalenza vero e falso non possono stare sulla stessa colonna. *Ergo* la falsificazione iniziale, da cui tutto il calcolo dipende, è falsa e la formula è una tautologia. Se avessi calcolato la tavola di verità completa ($2^3 = 8$ righe) avrei ottenuto otto righe, ciascuna delle quali con il valore vero sotto il connettivo più esterno.

Entrino i quantificatori

Il risparmio computazionale dato dal metodo per assurdo è questa volta piccolo: otto righe di calcolo per lui, otto per la tavola di verità. Il risparmio sarebbe stato più consistente con una formula più ricca di variabili. Resta, però, che, quando nelle formule compaiono quantificatori, le tavole di verità non sono più in linea di principio più implementabili. Ora ho a che fare con predicati che predicano certe caratteristiche di individui appartenenti a insiemi infiniti. Se la variabile x può assumere infiniti valori, non posso più materialmente scrivere la tavola di verità per calcolare il valore di espressioni come$\forall x.P(x)$ o $\exists x.P(x)$. In presenza di quantificatori devo ricorrere ad altre modalità di presentazione della semantica in grado di trattare l'infinito.

Non solo. Per dimostrare la validità di una fbf quantificata non posso ricorrere a metodi finitari, come le tavole di verità. Mi occorre usare metodi del tipo per assurdo o per induzione. I quantificatori quantificano le variabili. Le variabili possono variare all'infinito. Quindi, per falsificare una formula esistenziale, che afferma l'esistenza di un particolare x che gode di una determinata proprietà P, devo passare in rassegna infiniti valori della variabile. Se non trovo il valore che la falsifica dopo dieci, devo testare i prossimi cento; se il test fallisce dopo cento, devo provare con i prossimi mille e così via. Non potendo materialmente eseguire il test, devo escogitare una dimostrazione che dimostri l'assurdità dell'esistenza di una x siffatta. Analogamente, per verificare l'universalità di una proprietà P in un insieme numerabile di valori, non posso cavarmela dicendo che la proprietà vale per il primo, per il secondo, per il terzo e così via. Per concludere in modo valido devo montare una prova per induzione, che *dimostri* che la proprietà vale per il primo valore e che, se vale per l'n-esimo, allora vale per l'(n+1)-esimo.

Precisazione terminologica. Quando la fbf è quantificata non si parla di tautologie ma di formule *logicamente valide*, cioè formule sempre vere comunque si scelgano gli universi di individui sui cui variano le variabili e comunque si assegnino i valori di verità alle variabili proposizionali. Le tautologie sono formule logicamente vere, ma non viceversa. Le tautologie sono formule valide su universi vuoti.

Stati epistemici e forcing

Per formalizzare la semantica l'approccio che mi piace adottare, anche perché lo trovo particolarmente intuitivo, fa riferimento agli stati epistemici e al cosiddetto metodo del *forcing* o della "forzatura". Si tratta di individuare il modo in cui gli stati di sapere, o epistemici, *forzano* certe formule a essere vere. Non è un metodo molto diverso dalle tavole di verità. Direi che il *forcing* estende in modo intuitivo il metodo delle tavole di verità al caso infinito, per definizione intrattabile con il metodo finitario delle tavole di verità. Ricordatevi di questo passaggio dal finito all'infinito quando nell'ultimo seminario parlerò dell'interazione tra soggetto finito e oggetto infinito. A me piace in particolare il metodo del *forcing* perché si rivela adatto a trattare l'indebolimento binario e quindi l'epistemologia dell'inconscio.

Ancora una digressione. *A me piace*… Quante volte avete sentito a lezione di matematica questa locuzione: *a me piace*? Quante volte avete sentito l'insegnante esprimere opinioni personali in merito ai matemi che andava esponendo? Quelli come me, che provengono dagli studi classici, sono abituati a pensare che la matematica sia categorica, oggettiva, meccanica, rigorosa, automaticamente escludente le ubbie della soggettività, le interpretazioni metaforiche e fantasiose. Ammesso che sia rigorosa, dobbiamo riconoscere che la matematica non esclude il soggetto. Il senso di questi seminari è che esiste un soggetto nella matematica. Ricordate il ritornello: la matematica si fa in più modi. Al soggetto tocca scegliere il modo che gli va bene. Poiché si tratta di modi epistemici, ognuno dei quali articola il sapere in modo diverso, il soggetto *deve* riconoscere il proprio – il proprio modo di *ap-prendere* la verità. Il soggetto, se è un soggetto epistemico, è un soggetto morale: *deve* decidere di seguire un meccanismo epistemico – un algoritmo – piuttosto che un altro, semplicemente perché quello è il suo, senza preoccuparsi né di conformarsi all'ortodossia né di cadere nell'eterodossia. Ortodossia ed eterodossia sono gli spauracchi del conformismo, purtroppo vigente in tante scuole di formazione alla psicanalisi. La matematica non conosce la falsa dicotomia tra ortodossia ed eterodossia. La matematica è una pratica creativa, una *poiesis* – il termine psicanalitico è *sublimazione* – come la pittura, la poesia o – il paragone s'impone – la musica. Dire che la matematica o la scienza fuorcludono il soggetto è la solenne sciocchezza che circola in ambienti postlacaniani, un'esca a cui abbocca preferibilmente chi ha avuto la sfortuna, come chi vi parla, di ricevere una formazione umanistica, scolastica e libresca, dogmatica e fanatica.

Il *forcing*, distingue gli stati epistemici (s.e.) dai risultati veritativi delle formule, introduce una divisione molto psicanalitica tra sapere e verità. Gli stati epistemici, che indico con lettere greche maiuscole, forzano le formule, che indico con lettere greche minuscole, a essere vere. Indico il *forcing* con il segno di Frege raddoppiato $|=$ e scrivo $\Gamma \models \alpha$ per indicare che lo stato epistemico Γ forza la fbf α a essere vera. Non è un caso che usi il segno di Frege raddoppiato. Infatti, ho in mente l'equivalenza tra sintassi, dove il segno di Frege indica il teorema, e semantica, dove si trattano proposizioni valide. La scrittura semantica risulta ancora un po' misteriosa sul versante degli s. e. Cosa sono in effetti gli s.e.?

Gli s.e. generalizzano la nozione di modello. Possono essere insiemi di fbf di cui si sa la verità. Lo s.e. che forza p è uno stato che marca p con **V**. Lo s.e. epistemico che forza *p et q* è uno stato che marca con **V** sia p sia q. La differenza è che "marcare" è il verbo che si usa in sintassi e "forzare" (alla verità) è il verbo che si usa in semantica. Lo s.e. è un insieme di modelli che verificano la formula, letteralmente la "fanno vera". Nello s.e. Γ la formula α non può far altro che essere vera, è una forzata della verità, si potrebbe dire con metafora un po' ardita.

Italo Carta. Lo s.e. è una configurazione logica.

Si può dire così. Lo s. e. è una configurazione di valori di verità Mi servirà in seguito la tua definizione, perché è ampia. Mette dentro tutto: la verità delle fbf, la metalogica con i suoi metateoremi, pezzi di modelli che servono a montare modelli più complessi, sottoinsiemi di individui (o parametri) che soddisfano certe formule ma non altre, ecc. Il sapere, soprattutto quello tecnico, non può sottrarsi a un aspetto di *bricolage* o di capanno degli attrezzi, per non dire archivio o addirittura pattumiera. *Sicut palea*, "come letame", diceva della sua opera l'Aquinate in punto di morte. Il sapere è "il letame da cui nascono i fior". Preferisco parlare di s.e. perché puntano al soggetto. Il quale sa che si tratta di quella specifica configurazione logica e non di un altra. La dizione "configurazione logica" è leggermente meno concreta, di s.e. S.e. indica uno stato soggettivo.

Italo Carta. Ci sono arrivato per altre strade.

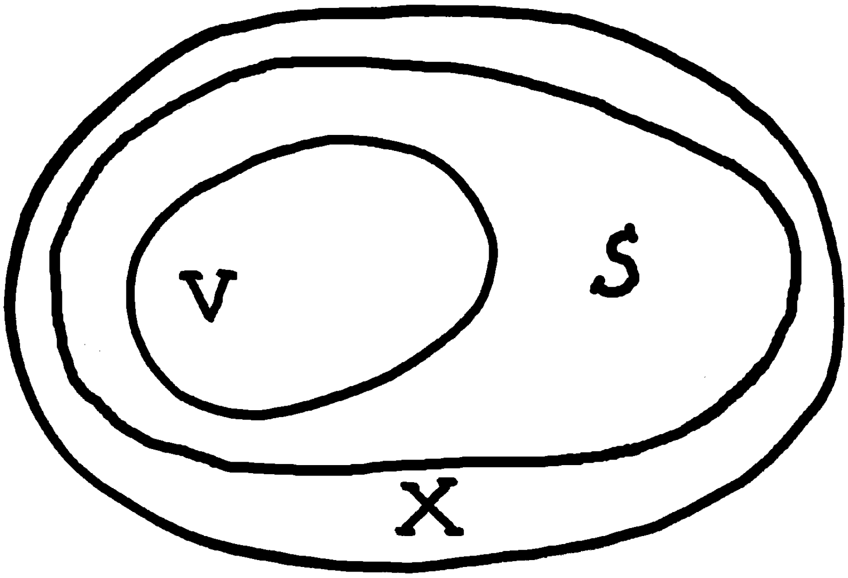
Ben vengano le altre strade. Ci sono tante strade per fare logica, non ce n'è una sola, quella che abbiamo imparato a scuola. Lo sto ripetendo dall'inizio fino alla noia. E aggiungo da psicanalista: ci sono tante strade per fare un'analisi. Si va dall'autoanalisi di Freud alle sedute variabili di Lacan. Non c'è un codice deontologico unico per l'analisi a cui l'analista debba conformarsi. Sarebbe scambiare formazione con conformazione o conformismo. Non c'è solo l'analisi della vostra scuola. Lo dico senza pregiudizi sulle scuole esistenti. Dico solo che l'analisi si fa all'interno di scuole che non esistono ancora. Quando esisteranno, l'analisi sarà passata altrove, in nome della pluralità e della democrazia. Tutto è da giudicare in base ai risultati effettivi. Il metodo sintattico produce risultati. Il metodo semantico produce risultati, La scuola A produce risultati. La scuola B produce risultati. Confrontiamoli. Alcuni risultano equivalenti ad altri. Altri diversi. Alcuni sono fecondi di altri risultati ancora. Altri sono sterilmente fini a se stessi. Il confronto si fa *a posteriori*. Pretendere di farlo *a priori* è pura ideologia.

La tabella semantica, corrispondente alla sintattica, è composta da sette righe:

1. $\Gamma \models p$ solo se p è una formula atomica con individui di Γ;
2. $\Gamma \models (\alpha \wedge \beta)$ sse $\Gamma \models \alpha$ *et* $\Gamma \models \beta$;
3. $\Gamma \models (\alpha \vee \beta)$ sse $\Gamma \models \alpha$ *vel* $\Gamma \models \beta$;
4. $\Gamma \models \neg\alpha$ sse $\Gamma =\!| \ \alpha$ ($=\!|$ sta per *non* $\models$);
5. $\Gamma \models (\alpha \Rightarrow \beta)$ se $\Gamma \models \alpha$ *seq* $\Gamma \models \beta$;
6. $\Gamma \models \exists x.\alpha(x)$ sse, per qualche individuo a di Γ, $\Gamma \models \alpha(a)$;
7. $\Gamma \models \forall x.\alpha(x)$ sse, per ogni per ogni parametro a di Γ, $\Gamma \models \alpha(a)$.

(In questa tabella uso i termini latini in funzione metalogica, un po' come nella tabella sintattica stavano in posizione metalogica le marche di verità **F** e **V**).

Posto che un modello sia un'organizzazione di s.e., si dice che la formula α è *valida* in un modello se ogni s.e. del modello la forza a essere vera. Se è valida in ogni modello si dice che è *logicamente valida*. Se è valida in almeno in un modello si dice che è *soddisfacibile*. Il rapporto tra l'insieme degli enunciati validi e di quello degli enunciati soddisfacibili è di inclusione stretta, come rappresentato in figura:



Grazie al teorema di completezza, che discuterò tra poco, si può dare una caratterizzazione sintattica degli insiemi di fbf V ed S:

$V = \{\alpha \in X \mid \forall\Gamma: \Gamma \models \alpha\} = \{\alpha \in X \mid \forall\beta: \beta \vdash \alpha\}$,
$S = \{\alpha \in X \mid \exists\Gamma: \Gamma \models \alpha\} = \{\alpha \in X \mid \exists\eta: \eta \vdash \alpha\}$,

dove X è l'insieme delle fbf e $\eta = \Gamma \models p, q, \ldots, r$.

Apparentemente il calcolo semantico è meno meccanico e costrittivo di quello sintattico. Questo in parte è vero, per la grande gioia degli antimeccanicisti, che vedono così rivalutati i titoli azionari di verità e di significato. In realtà i due algoritmi sono diversi. Lo dico dopo aver sottolineato tante volte le somiglianze. La differenza è la stessa che passa tra contesto di ricerca e di giustificazione, tra *ars inveniendi* e *judicandi*. Trovare un modello o una classe di modelli per una formula richiede una piccola dose di ingegno. Giustificarla sintatticamente richiede solo applicazione e diligenza.

La completezza, finalmente

Passo al tante volte annunciato e da tanti indizi convergenti già dimostrato (meta)teorema di completezza. Esso si scompone in due sottoteoremi. Dalla sintassi alla semantica opera il *teorema di validità o di correttezza*, secondo cui, se una formula è un teorema, allora è logicamente valida (valida in ogni modello). In formule:

$$\vdash \alpha \textit{ seq} \models \alpha.$$

Nell'altro senso opera il teorema inverso, o teorema di completezza, concettualmente più impegnativo, che consente di passare dalla semantica alla sintassi. Esso afferma che ogni formula logicamente valida può essere dimostrata come teorema. In formule:

$$\models \alpha \ seq \vdash \alpha.$$

Segnalo subito una piccola incongruenza di scrittura. A sinistra del segno di validità non ho posto alcuno s.e., intendendo indicare che ci possono stare tutti. La notazione è giustificata per simmetria con il segno di Frege, il quale non ha presupposti a sinistra, tranne i presupposti metalogici rappresentati dalle regole. (Esistono formalizzazioni sintattiche, per esempio il calcolo dei sequenti di Gentzen, che utilizzano "assunzioni" a sinistra del segno di Frege).

A parte il significato ufficiale: tutte le dimostrazioni sono vere, tutte le verità sono dimostrabili, il teorema di completezza ha un significato che si lascia cogliere in base ai concetti precedentemente introdotti di contesto di ricerca e di giustificazione. Il contesto semantico è il contesto di ricerca: in semantica si scovano modelli. Il contesto sintattico è il contesto di giustificazione: in sintassi si dimostrano teoremi. È vero, stiamo per dimostrare che in logica i due contesti si sovrappongono. Ma questo dimostra solo la povertà della logica, non l'inopportunità di distinguere i due modi. E suggerisce anche l'opportunità di passare dal *logos* a strutture più ricche, per esempio l'*arithmos*. In questo seminario non faremo il passo, ma ci attrezziamo per il prossimo, indebolendo il *logos*. Solo allora non proveremo nostalgia ad abbandonare la sua completezza alquanto misera. Il *logos* è completo perché è povero. L'*arithmos* è incompleto perché è ricco. Vi sconsiglio di prenderlo per un paradosso.

Teorema di validità o correttezza: $\vdash \alpha \ seq \models \alpha$

Il (meta)teorema garantisce che, se ho dimostrato qualcosa, allora non ho dimostrato fregnacce. Più accademicamente asserisce che il calcolo non introduce incoerenze, cioè che tutte le tesi sono valide o soddisfatte da tutti i modelli. Se vado a verificare i risultati del procedimento sintattico con le regole della semantica, trovo solo verità logiche, ossia formule forzate a essere vere da ogni s.e. In altri termini, se la fbf α è un teorema, allora non esiste un contromodello – o configurazione logica – che la falsifichi, ossia non esiste uno s.e. che forzi la sua negazione a essere vera.

Ammetto, infatti, per assurdo $=\!| \ \alpha$, cioè che α non sia valida. Allora esiste almeno uno s. e. Γ che non forza α a essere vera, quindi, per la definizione 4., forza la sua negazione a essere vera: $\Gamma \models \neg\alpha$. Pertanto Γ è un contromodello di α. Per ipotesi $\vdash \alpha$. Quindi, partendo da $\mathbf{V}\neg\alpha$ e passando per $\mathbf{F}\alpha$, si verifica che non esistono contromodelli di α, perché l'albero di derivazione è chiuso, cioè tutte le sue foglie contengono contraddizioni. Ma l'ipotesi di invalidità sostiene che ce ne sia un contromodello. Contraddizione. L'ipotesi assurda di invalidità è assurda e, per la legge di tripla negazione, va respinta. In conclusione, devo ammettere che se la fbf α è un teorema, allora è valida, cioè tutti i modelli sono suoi modelli (o è forzata a essere vera da tutti gli s.e.). In formule, $\vdash \alpha \ seq \models \alpha$.

Se il sistema di calcolo è semanticamente corretto – cioè rispetta la semantica, in pratica il principio di bivalenza – è anche assolutamente consistente. Infatti, non dimostra tutto: se dimostra α, allora non dimostra $\neg\alpha$. In pratica, il sistema è anche sintatticamente consistente nel senso che non dimostra la contraddizione $\alpha \wedge \neg\alpha$.

Teorema di completezza: $\models \alpha \ seq \vdash \alpha$

A parole: se una fbf è sempre vera per ogni combinazione di individui o di valori di verità – per ogni configurazione logica, s.e. o modello, ditelo come vi pare – ossia se una fbf è valida, allora esiste un procedimento sintattico che la dimostra come teorema.

Do un accenno di dimostrazione di questo metateorema che vale in logica ma non in aritmetica. In aritmetica vale solo la prima metà del teorema di completezza, cioè il teorema di correttezza. Non vale la seconda. In aritmetica, se dimostro una formula *comme il faut*, per esempio che 2+2 fa 4, allora sono sicuro di non aver commesso sciocchezze. Ma in aritmetica, ammesso che sia coerente, ci sono verità logicamente valide che non riesco a dimostrare. L'apparato sintattico dell'aritmetica, per quanto potente e raffinato, pur dotato del metodo induttivo di Maurolico per dimostrare teoremi infiniti, lascia sempre fuori – "fuorclude" direbbero i lacaniani – delle verità.

A me psicanalista il teorema di incompletezza dell'aritmetica interessa come modello dell'inconscio freudiano. L'inconscio è questo eccesso della verità sulla dimostrabilità, isomorfo a quello che si riscontra in aritmetica. Nell'inconscio c'è tanta, anzi troppa verità, perché il sistema psichico riesca a portarla tutta a galla alla consapevolezza della coscienza, ossia a tradurla in teoremi sintattici. Nell'inconscio ci sono verità – le verità del fantasma – che non riesco a trasformare completamente in teoremi, cioè in sapere conscio senza un adeguato e prolungato lavoro di analisi. Le verità non acquisite dalla coscienza premono per essere riconosciute e si ripetono. La coazione a ripetere della pulsione di morte trova la sua base epistemologica nell'incompletezza dell'apparato psichico. Paradossalmente, l'apparato psichico potrebbe afferrare tutte le verità dell'inconscio se diventasse incoerente. Ma allora sarebbe inutile parlarne, perché insieme al vero dimostrerebbe anche il falso.

Il teorema di correttezza è, come avete visto, facile da afferrare, *ap-prendere*. Quello di completezza è più sottile. Non vi do la dimostrazione matematica precisa perché non siamo matematici. Mi limito a darvi lo schema concettuale della dimostrazione. Ricordo che la prima dimostrazione del teorema di completezza della logica, sotto forma di teorema di validità, fu data nel 1930 da Gödel in forma filoniana e contrappositiva nella sua tesi di laurea: ogni fbf o è soddisfacibile (cioè ha almeno un modello) o è refutabile (cioè si dimostra la sua negazione).

Come prima il ragionamento procede per via contrappositiva, cioè sposta la negazione del conseguente nell'antecedente. Per dimostrare che, se α è valida, allora α è un teorema, assumo che α non sia un teorema: $—| \alpha$ ($—|$ è la negazione del segno di Frege). Se riuscirò a dimostrare che vale la negazione dell'antecedente (esiste un s.e. Γ tale che $\Gamma =| \alpha$), allora avrò ottenuto una contraddizione, che mi permette di confutare l'assurdo e dimostrare il teorema di validità.

Cosa vuol dire $—| \alpha$? Vuol dire che quando cerco di dimostrare α per assurdo – sto introducendo un assurdo dentro una dimostrazione per assurdo, ma la cosa non vi deve spaventare – non incontro contraddizioni. Ma attenzione! Per guadagnare la dimostrazione in tutta la sua generalità devo ammettere che in α ricorra un predicato, in generale *n*-ario, cioè a *n* variabili. Per semplicità ammetto che α sia unario, $\alpha(x)$. Il punto critico della dimostrazione è che le variabili possono essere quantificate con $\forall$ o $\exists$ su insiemi infiniti di valori. Se non ci sono quantificatori me la cavo passando in rassegna esaustivamente un numero finito di casi (perché ogni fbf contiene un numero finito di variabili e le loro combinazioni restano finite, anche se numerose). Può essere noioso, ma arrivo sempre alla fine. Ma se ci sono quantificatori, per esempio universali? Allora devo dimostrare che $\alpha(1)$ non porta a contraddizione, cioè che l'albero dimostrativo di $\mathbf{F}\alpha(1)$ non è chiuso. Lo stesso devo dimostrare che vale per

$\mathbf{F}\alpha(2)$, $\mathbf{F}\alpha(3)$ e così via all'infinito. Niente paura. Maurolico mi ha insegnato come trattare l'infinito. Procedo per induzione come ho imparato da Maurolico in due battute: prima dimostro la base e poi il passo. Dimostro che $\mathbf{F}\alpha(1)$ non è chiuso (base) e che, se $\mathbf{F}\alpha(n)$ non è chiuso, allora $\mathbf{F}\alpha(n+1)$ non è chiuso (passo induttivo). Se la dimostrazione per induzione riesce, so che non arriverò mai a una contraddizione per quanto in avanti mi spinga a cercarne una. Devo ammettere, allora, che esiste un modello, in generale una combinazione infinita di individui (o parametri), che falsifica α (che verifica *non* α). In altri termini, arrivo a dimostrare che esiste un contromodello di α, cioè $\Gamma =\!| \ \alpha$ (o $\Gamma \models \neg\alpha$). Ma questo è assurdo perché per ipotesi α è valido ($\models \alpha$) e non ha contromodelli. Tutti gli s.e. forzano α, non forzano $\neg\alpha$ a essere vera. Quindi, confuto la tesi di partenza $\dashv \alpha$ e dimostro $\vdash \alpha$.

La storia fallimentare dell'ortodossia si ripete sempre uguale in ogni scuola

Un'osservazione storica sul valore frustrante e inibitorio dell'ortodossia. Nella dimostrazione di validità entra in gioco in modo essenziale il metodo induttivo. Esso non può essere eliminato per la semplice ragione che, come ho già fatto osservare, ci sono variabili infinite da trattare. Il grande Hilbert, maestro di diverse generazioni di matematici, tra cui von Neumann e lo stesso Gödel, aveva preso una posizione ben precisa nel dibattito sui fondamenti della matematica, che parevano messi in crisi dalle antinomie della teoria degli insiemi: gli pseudoparadossi di Russell sugli insiemi che non contengono se stessi e altre futilità. Alla scuola di Frege si insegnava che la matematica è logica (logicismo). Alla sua scuola Hilbert si insegnava che le vere dimostrazioni matematiche vanno ottenute con metodi finitari. Così, con questa strategia logocentrica – il *logos* per definizione è finito e tutto ciò che è finito appartiene al *logos* – Frege prima e Hilbert pretendevano mettersi al riparo da spiacevoli sorprese, come incontrare qualche antinomia vulgivagante. Peccato che così commettevano entrambi lo stesso errore degli antichi, i quali consideravano contraddittorio il ricorso all'infinito nella dimostrazione. L'infinito, sappiamo da Maurolico, si può ospitare in una dimostrazione, rispettando le dovute formalità, per esempio quelle del metodo induttivo. Il risultato fu punitivo per entrambi. Prima per Frege, il cui logicismo fu smontato dal paradosso di Russell degli insiemi che non contengono se stessi, e poi per Hilbert, il cui formalismo fu smontato due volte, prima da Gödel e poi da Turing.

Con in più uno sberleffo. Il giovane Gödel bagnò il naso allo stesso Hilbert e ad altri matematici di vaglia, che non riuscirono a dimostrare neppure il teorema di completezza della logica, che stava davanti ai loro occhi e che pure sarebbe stato utile alla causa del formalismo. Addirittura, come Gödel fece notare, il teorema di completezza era già stato dimostrato nelle linee essenziali da Skolem e Löwenheim, in un teorema di cui dirò tra poco. Ma a tanto può portare la cecità indotta dall'ortodossia: a non voler sapere quel che si sa già. Il merito di Gödel fu di aver rivendicato per sé il diritto di ogni buon matematico: il diritto, cioè, a trattare l'oggetto infinito, sia in matematica sia in metamatematica, indipendentemente dalle costrizioni imposte dalle ubbie scolastiche. Anche quando sono il portato di errori geniali, come indubbiamente furono quelli di Frege e di Hilbert, cui dobbiamo rispettivamente la formalizzazione della logica e della geometria,

Meglio l'incompletezza

Dopo aver dimostrato il teorema di completezza per la logica si apre una questione. Come mai, applicando lo stesso procedimento, non riesco a dimostrare la completezza dell'aritmetica? Dopo tutto, uso metodi dimostrativi usuali anche in aritmetica: la riduzione all'assurdo e l'induzione, della cui validità nessuno dubita. Allora, come mai riesco a dimostrare la completezza della logica ma non quella dell'aritmetica? Addirittura, solo un anno dopo aver dimostrato la completezza della logica, Gödel dimostra positivamente l'incompletezza dell'aritmetica, con una performance che Leibniz avrebbe apprezzato. Cosa ci sta sotto?

Non è la prima volta che la matematica si trova davanti a dimostrazioni di incompletezza. La prima, più traumatica dell'ultima – si racconta che Ipparco che la scoprì si suicidò – risale all'epoca pitagorica (VI a.C.), quando la dimostrazione dell'incommensurabilità tra diagonale del quadrato e lato decretò l'incompletezza dell'aritmetica dei numeri razionali (*logoi*) rispetto alla geometria. Anche Ipparco usò la dimostrazione per assurdo. Supponeva che la radice di 2 si potesse scrivere come rapporto di interi: m/n. Allora, elevando al quadrato, $2 = m^2/n^2$, cioè $2n^2 = m^2$. Oggi Ipparco, che non conosceva ancora il teorema fondamentale dell'aritmetica, ragionerebbe così. m^2 è un quadrato, quindi, se compare la potenza di 2, essa ha esponente pari, ma in $2n^2$ l'esponente di 2 è dispari, perché in n^2 è pari, quindi l'equazione è assurda. Il *logos* accusò il colpo. Aristotele accenna a una dimostrazione simile a quella di Ipparco nei suoi *Analitici Primi*, ma non sembra sconvolto. D'altra parte, il *logos* si prese una secca rivincita proprio con la metafisica aristotelica fondata sul logocentrismo, potenziato da Plotino con la turboontologia dell'Uno. Sarà la seconda dimostrazione di incompletezza più efficace contro la metafisica? Molti lo sperano.

Anche l'ultima dimostrazione di incompletezza dell'aritmetica ha radici antiche. Risale al paradosso del mentitore di Epimenide. "Io mento" significa che dico il falso. Ma allora dico il falso quando dico il falso, cioè dico il vero. Ma se dico il vero, dico il falso. Ho già accennato alla mia diffidenza nei confronti dei paradossi. Anche quello di Epimenide non suona bene alle mie orecchie. In termini moderni direi che ragiona pedestremente come il circuito di un campanello: se si chiude, attiva l'elettrocalamita che lo apre, ma se si apre la calamita si disattiva e il circuito si chiude. Se salvo il paradosso di Epimenide è solo perché Gödel ha scovato per lui un utilizzo più degno ("assiomatico") che come campanello elettrico. Il campanello di Gödel è la formula $\neg$*Bew* (*Bew* sta per *beweisbar*, dimostrabile) che predica di se stessa che non è dimostrabile nell'aritmetica. Il teorema di Gödel si dimostra per assurdo. Ammetto per assurdo che $\neg$*Bew* sia dimostrabile. Allora sarebbe vera, se l'aritmetica fosse corretta. In tale ipotesi, è vero che $\neg$*Bew* è indimostrabile, contro l'ipotesi per assurdo. L'aritmetica è allora semanticamente incompleta perché contiene una formula vera ma non dimostrabile. (Si dimostra anche che l'aritmetica è sintatticamente incompleta. Infatti, poiché $\neg$*Bew* è vera, $\neg\neg$*Bew* è falsa e quindi, per la correttezza, indimostrabile. Conclusione né $\neg$*Bew* né $\neg\neg$*Bew* sono dimostrabili in aritmetica). Poiché nella "dimostrazione" ho usato l'ipotesi di correttezza, il primo teorema di incompletezza di Gödel suona: *Se l'aritmetica è corretta, allora è incompleta*. La formula in questione si rivela nient'altro che l'autoaffermazione di coerenza (Secondo teorema di incompletezza di Gödel). Quindi l'assunzione della coerenza è essenziale per dimostrare l'incompletezza. Insomma, la coperta è corta: l'aritmetica o è coerente, e allora è incompleta, o è incoerente e allora guadagna una completezza fasulla, nel senso che dimostra tutto e il contrario di tutto.

Già, perché il trucco di Epimenide non vale in logica? Perché non posso dimostrare alla stessa maniera che la logica è incompleta? Per fortuna non posso, altrimenti avrei dimostrato una contraddizione con il teorema precedente. Con conseguenze disastrose per tutta la matematica. Ma il punto è proprio questo: $\neg Bew$ non è una fbf del sistema, ma è una metaaffermazione sul sistema. Afferma che nel sistema esiste una certa fbf $\neg Bew$ che non è dimostrabile nel sistema. La metaaffermazione si può calare nell'aritmetica in modo che l'aritmetica parli di se stessa. Non si può, invece, calare nella logica in modo che la logica parli di se stessa. Grazie a dio, la logica è espressivamente poco potente, nel senso che non può incorporare in sé la propria metalogica. L'aritmetica, invece, è espressivamente potente: può parlare di se stessa con la conseguenza appena vista. Ci sono cose in aritmetica che in logica non si riescono a dire, e sono le cose dell'aritmetica più interessanti da dire. Amleto esce dal *logos* quando ammonisce: "Ci sono più cose tra cielo e terra che nella tua filosofia, Orazio". Ci sono cose che l'aritmetica dice e la logica no. Rovesciando i termini, diciamo che si può parlare di metalogica in logica, ma non si può parlare di metamatematica in matematica, perché è ancora matematica. Direi, parafrasando Lacan, che non esiste la metamatematica della matematica. Ma l'aritmetica paga un prezzo per la sua maggiore potenza espressiva rispetto alla logica, arrivando a essere tanto potente da inglobare la propria metateoria. Il prezzo è l'incompletezza. Sì riesce a dire più verità della logica, la matematica, ma al prezzo di non poterle dimostrare. Sì riesce a parlare del proprio linguaggio, ma a patto di non poterlo teorizzare tutto.

Non affronto la spiegazione di come Gödel riuscì a calare la metaaritmetica nell'aritmetica. È la parte della sua dimostrazione più interessante per il matematico. Dico solo che utilizza il teorema fondamentale dell'aritmetica e il teorema cinese del resto in modo da codificare la formula $\neg Bew$ in una fbf dell'aritmetica. La tecnica di tale codifica, oggi nota come gödelizzazione, avrebbe riscosso gli applausi di Leibniz, che invano cercava una lingua *charateristica universalis*, una sorta di lingua numerica per esprimere tutta la matematica in modo formalizzato.

La povertà del logos

Povero *logos*! Che fine gli ho fatto fare! Cosa si può dire della povertà del *logos*? La povertà del *logos* è di non essere il *logos* del numero. Il *logos* non ha le parole per dire il numero. Tra le formule notevoli che oggi vi ho dimostrato non ce n'è una che riguardi il numero uno, due o tre. Esistono metateoremi che codificano questa deficienza della logica. Il teorema di compattezza dice che un sistema di logica è coerente sse lo sono tutti i suoi sottosistemi finiti. In questo caso la logica non distingue tra infinito e finito. Per il teorema di Skolem e Löwenheim un sistema ha un modello sse ha un modello numerabile. Addirittura la logica non distingue tra infiniti superiori al numerabile, scoperti da Cantor con il suo metodo diagonale. La logica non sa distinguere banalmente tra l'infinito del contare – l'infinito numerabile – e l'infinito del disegnare – l'infinito del continuo.

E si vuole fondare la metafisica sulla logica, l'ontologia sulla sua miseria? Pretese idealistiche che oggi tornano a sventolare sulle barricate antiscientifiche (quindi antifreudiane). Ma non sarebbe più saggio, invece, seguendo l'esempio di Freud, abbandonare il progetto metafisico e dedicarsi alla *illogica*, magari all'illogica dell'inconscio? Ma la logica affascina. Ha affascinato per millenni. Come? Vendendo il trucco della completezza. Una lustra che, evidentemente, acchiappa più gli ossessivi delle isteriche.

Ne do notizia perché mi sembra doveroso segnalare il pericolo a studenti che stanno per specializzarsi in psichiatria. La lotta per riaffermare la vecchia ontologia aristotelica è oggi condotta con più vigore dalla filosofia analitica. La quale è anche la filosofia che con maggior puntiglio attacca il cartesianesimo. È una filosofia – voglio ricordare – proveniente dagli stessi territori culturali che hanno distrutto la vecchia psichiatria clinica ottocentesca. Forse non è stato un male. Ma certo non è stato un bene sostituirla con le varie edizioni del DSM, finalizzate unicamente alla sperimentazione degli psicofarmaci e agli interessi dell'industria farmaceutica.

Chi ha detto che il povero *logos* è innocuo!

(torna alla home)