CONSIDERAZIONI COMPARATIVE SULLE RECENTI RICERCHE GEOMETRICHE

Programma per l'ingresso alla Facoltà di Filosofia, presentato da Felix Klein al Senato della Reale Università Federico Alessandro di Erlangen, Erlangen, Deichert, ottobre 1872.[1] [Traduzione dal tedesco di Antonello Sciacchitano.]

Tra le *performance* degli ultimi cinquant'anni in campo geometrico la realizzazione della geometria proiettiva è al primo posto.[2] Benché le cosiddette relazioni metriche sembrassero inizialmente inaccessibili alla geometria proiettiva, dato che le proiezioni non conservano [le distanze], recentemente si è appreso un modo per trattare le relazioni metriche anche dal punto di vista proiettivo, estendendo così il metodo proiettivo a tutta la geometria. Le proprietà metriche non si presentano più come proprietà in sé degli oggetti spaziali, ma come loro relazioni con una forma (*Gebilde*) fondamentale, il cerchio [immaginario] all'infinito.

Confrontando le nozioni della comune geometria (elementare) con questo diverso modo, acquisito gradualmente, di considerare gli oggetti dello spazio, si pone la questione di un principio generale da cui dedurli entrambi. La questione acquista maggiore rilevanza dato che, oltre alle geometrie elementare e proiettiva, esistono altri metodi, anche se meno sviluppati, cui si deve riconoscere lo stesso diritto di esistenza autonoma. Ne fanno parte la geometria dei raggi [vettori] reciproci,[3] la geometria delle trasformazioni razionali[4] e altre geometrie presentate di seguito.

L'impresa di formulare tale principio [generale], non porta a nulla di veramente nuovo, ma rende solo più chiaro e distinto ciò che altri ha già pensato in modo più o meno preciso. Tuttavia, mi è parso tanto più giustificato pubblicare considerazioni riassuntive in quanto, benché materialmente una la geometria, a causa del rapido sviluppo degli ultimi tempi si è scissa in discipline pressoché separate,[5] che continuano a svilupparsi quasi indipendentemente le une dalle altre. Inoltre, intendo in particolare esporre metodi e punti di vista sviluppati da Lie e da me in recenti lavori. Pur trattando temi diversi, i nostri lavori coincidono dal punto di vista generale qui avanzato. Di

---

[1] [Nota all'edizione francese del 1893 della traduzione di H. Padé. Dopo la comparsa, circa un anno fa (1890) della traduzione del mio programma di Erlangen negli *Annali di Matematica* [a opera di Gino Fano], ho accettano molto volentieri la proposta di H. Padé di una traduzione francese, tanto più che oggi in Francia la teoria dei gruppi sembra attirare l'attenzione come non mai prima e che, di conseguenza, il contenuto del mio programma può suscitare qualche interesse. Nella traduzione italiana ho apportato al testo delle piccole modifiche e ho aggiunto delle note correttive, qui evidenziate con [Nota del 1893. Non ho citato i lavori successivi al 1872, benché pertinenti. La rassegna sarebbe stata troppo impegnativa e avrebbe richiesto un completo rimaneggiamento del testo. Che spero di poter realizzare in un prossimo futuro.] [Le note tra parentesi quadra senza data sono del traduttore.]

[2] Cfr. Nota 1 dell'annesso.

[3] [Fissata una sfera di centro O e raggio r, a ogni punto P dello spazio si associa il punto P', che giace sulla retta OP e tale che $OP.OP' = r^2$. Questa trasformazione dello spazio in se stesso porta figure interne alla sfera in figure esterne e viceversa, conservando gli angoli (trasformazione conforme).]

[4] [Trasformazione dello spazio in se stesso, caratterizzata dal rapporto di due funzioni lineari delle coordinate.]

[5] Cfr. Nota 2 dell'annesso. *Suddivisione disciplinare della geometria moderna.*

conseguenza, era in un certo senso necessario discuterli anche in questa sede, per precisarne contenuti e tendenze.

Pur parlando solo di ricerche geometriche, si devono includere le ricerche relative alle varietà (*Mannigfaltigkeiten*[6]) a numero arbitrario di dimensioni, le quali si sono sviluppate dalla geometria, una volta che si è fatta astrazione dalle rappresentazioni spaziali,[7] che non sono essenziali alla matematica pura (v. Nota IV). Anche per le varietà vi sono differenti approcci. Come in geometria, si tratta di mettere in luce ciò che vi è di comune e di differente in ricerche realizzate indipendentemente l'una dall'altra. In astratto, avrei potuto parlare solo di varietà a più dimensioni; ma l'esposizione risulta più semplice e comprensibile, riferendola alle usuali nozioni spaziali. Partendo dagli oggetti geometrici, presi come esempi per sviluppare le idee generali, seguirò la via attraverso cui si è sviluppata la scienza. È anche la via di solito più vantaggiosa da adottare ai fini dell'esposizione.

Non posso dare una panoramica di ciò che seguirà, non potendo ridurlo a una forma ancora più concisa.[8] I titoli dei paragrafi indicano lo sviluppo generale delle mie idee. Alla fine ho aggiunto una serie di note, dove ho ulteriormente chiarito alcuni specifici passaggi, sia quando mi è sembrato utile per l'economia generale dell'esposizione del testo, sia quando sono stato costretto a separare il punto di vista matematico astratto, essenziale per l'economia del testo, da punti di vista affini.

§ 1. *Gruppi di trasformazioni spaziali. Gruppo principale. Problema generale*

Il concetto essenziale, necessario all'intelligenza di quanto segue, è quello di *gruppo* di trasformazioni spaziali.

La composizione di un numero arbitrario di trasformazioni [cioè l'applicazione successiva di una trasformazione dopo l'altra] dà ancora e sempre una trasformazione.[9] Data una serie di trasformazioni, se ciascuna di esse ha la proprietà di essere il risultato della composizione di altre appartenenti alla serie, allora essa stesse appartiene alla serie. La serie prende il nome di *gruppo di trasformazione.*[10]

[6] [Il termine *Mannigfaltigkeit* è introdotto in matematica da Riemann (1854) e ripreso da Helmoltz e Klein. Esso indica una particolare struttura geometrica di uno spazio dotato di un tensore di curvatura. La traduzione italiana del termine è *varietà*. Questo termine è dovuto a E. Beltrami, che segue Gauss, il quale preferisce la dizione latina di *varietas*. Gino Fano, autore della prima traduzione del testo di Klein usa questo termine. Per contro la traduzione francese di Padé usa *multiplicité*, un termine lasciato cadere da Poincaré che in *Analysis situs* (1905) torna a fare la teoria delle varietà.]

[7] Cfr. Nota 3 dell'annesso. *Sull'importanza dell'intuizione dello spazio.*

[8] La concisione di forma è un difetto dell'esposizione, che ne renderà – temo – più difficile la comprensione. Tuttavia, avrei potuto rimediarvi solo dettagliando le singole teorie, qui solo accennate.

[9] Le trasformazioni vanno intese applicate alla totalità delle forme dello spazio [cioè a ogni forma dello spazio – punto, curva, superficie – è associato una forma dello stesso, eventualmente coincidente.] In seguito parliamo semplicemente di trasformazioni dello spazio. Alcune trasformazioni, per esempio duali di altre trasformazioni, possono trasformare forme in forme diverse. Nel testo questo caso non è distinto dagli altri.

[10] Concetto e nome derivano dalla *teoria delle sostituzioni*, dove al posto di trasformazioni di un continuo si tratta di permutazioni di un numero finito di elementi discreti. [Nota del 1893. La definizione va integrata. Si suppone implicitamente che ogni trasformazione abbia un'inversa. Ma, come per primo ha fatto notare Lie, nel caso

Un esempio di gruppo di trasformazioni è l'insieme dei movimenti, a patto di considerare ogni movimento come un'operazione effettuata su tutto lo spazio.[11] Le rotazioni intorno a un punto costituiscono un [sotto]gruppo, a sua volta ivi contenuto.[12] Per contro, la totalità delle collineazioni[13] forma un [sovra]gruppo che contiene il gruppo dei movimenti. La totalità delle trasformazioni per dualità non forma un gruppo, perché due trasformazioni per dualità[14] danno una collineazione; ma si ottiene di nuovo un gruppo, riunendo tutte le trasformazioni per dualità con tutte le collineazioni.[15]

In generale, vi sono trasformazioni dello spazio che lasciano invariate le proprietà geometriche delle figure. Infatti, le proprietà geometriche sono per definizione indipendenti dalla posizione che la figura in esame assume nello spazio, dalla sua grandezza assoluta, e infine anche dal senso[16] secondo cui sono disposte le sue parti. Le proprietà delle forme geometriche dello spazio non variano, dunque, in tutti i movimenti dello spazio: nelle similitudini, nelle riflessioni e in tutte le trasformazioni [del gruppo] ottenute componendo le precedenti. Chiamo *gruppo principale* delle trasformazioni dello spazio l'insieme di tutte queste trasformazioni; *le proprietà geometriche non sono alterate dalle trasformazioni del gruppo principale*.[17] Ma si può dire anche l'inverso: *le proprietà geometriche sono caratterizzate dalla loro invarianza rispetto alle trasformazioni del gruppo principale*. In effetti, se, per un istante, si considera lo spazio come immobile o come varietà rigida, ogni singola figura può essere studiata individualmente. Tra le proprietà che essa possiede come individuo, soltanto quelle propriamente geometriche si conservano nelle trasformazioni del gruppo principale. Quest'idea, formulata qui in maniera un po' vaga, apparirà più chiara nel corso dell'esposizione.

Astraendo dalla forma sensibile, matematicamente non essenziale, considero lo spazio semplicemente come una varietà estesa in più dimensioni, quindi, attenendomi alla usuale rappresentazione del punto come elemento dello spazio, come varietà

---

di un'infinità di trasformazioni, la supposizione non consegue necessariamente dalla nozione di gruppo. L'ipotesi va pertanto esplicitata nella definizione di gruppo.]

[11] [La concezione del movimento come trasformazione di tutto lo spazio ha ascendenze aristoteliche. Benché ad Aristotele mancasse la nozione di spazio come un tutto, è sua la concezione del movimento come cambiamento ontologico o *metabolé*. Negli anni in cui scriveva Felix si assisteva a una aristotelica *Renaissance*, soprattutto a opera di von Brentano.]

[12] Camille Jordan ha determinato tutti i [sotto]gruppi contenuti nel gruppo generale dei movimenti. Cfr. *Sur les groupes de mouvements*, "Annali di matematica", vol. II.

[13] [Le collineazioni (o omografie) sono trasformazioni di spazi proiettivi che trasformano rette in rette.]

[14] [Le trasformazioni per dualità associano punti a rette e rette a punti. Componendo due trasformazioni di questo tipo si associano punti a punti, perciò le trasformazioni duali non formano un gruppo.]

[15] Non è necessario, benché sarà così per tutti i gruppi menzionati nel testo, che le trasformazioni del gruppo si presentino in successioni continue. Per esempio, i movimenti, in numero finito, che portano un corpo regolare [come un poligono regolare o un poliedro regolare] a coincidere con se stesso formano un gruppo. Analogamente i movimenti, in numero infinito, che portano una sinusoide a sovrapporsi, formano un gruppo.

[16] Con senso intendo la proprietà d'ordine per cui una figura si distingue dalla propria simmetrica (immagine riflessa). Così il senso di un'elica destrogira si distingue dal senso di un'elica levogira.

[17] Queste trasformazioni formano per definizione un gruppo.

tridimensionale. Per analogia con le trasformazioni dello spazio, parlo di trasformazioni della varietà; anch'esse formano dei gruppi. Ma non c'è più, come nello spazio, un gruppo di significato distinto dagli altri: ogni gruppo è equiparabile a ogni altro. Come generalizzazione della geometria si pone allora il seguente problema generale:

Dati una varietà e un gruppo di trasformazioni, sviluppare la teoria degli invarianti della varietà rispetto al gruppo.[18]

Questo è il problema generale che comprende non solo la geometria ordinaria, ma anche i nuovi metodi geometrici qui presentati e i diversi modi di trattare varietà di estensione arbitraria. Quel che va in modo speciale sottolineato è l'arbitrarietà di scelta del gruppo aggiunto alla varietà. In questo senso vanno intese come equiparabili tutte le modalità di trattazione che ne conseguono, purché soddisfino i requisiti generali.

§ 2. *Gruppi di trasformazioni inclusi l'uno nell'altro aggiunti uno dopo l'altro. Differenti tipi di ricerca geometrica e loro relazioni reciproche*.

Dato che le proprietà geometriche degli oggetti spaziali non variano in *tutte* le trasformazioni del gruppo principale, sarebbe in sé e per sé assurdo cercare quelle proprietà che non variano rispetto a una parte delle trasformazioni del gruppo. Tuttavia, la questione si giustifica, sia pure solo formalmente, nello studio delle forme geometriche in rapporto a elementi ritenuti fissi. Per esempio, nella trigonometria sferica trattiamo gli oggetti geometrici in riferimento a un particolare punto speciale, distinto [dagli altri]. Allora, la richiesta successiva si formula così: sviluppare non solo le proprietà in sé invarianti degli oggetti geometrici rispetto all'aggiunzione del gruppo principale, ma anche le proprietà invarianti del sistema formato dagli oggetti *e* dal punto dato. La richiesta si può formulare diversamente: cercare quelle figure geometriche in funzione delle proprietà che non variano attraverso quelle trasformazioni del gruppo principale, che lasciano un punto fisso. In altre parole, è lo stesso studiare le figure geometriche nel senso del gruppo principale, aggiungendo loro il punto dato, oppure, senza aggiungere loro alcun punto, sostituire al gruppo principale il sottogruppo delle trasformazioni che mantengono questo punto fisso.

In seguito applico spesso questo principio, perciò voglio formularlo in tutta la sua generalità.

Sia data una varietà e un gruppo di trasformazioni per trattarla. Il problema è di studiare le forme geometriche in rapporto a una forma data. Si può procedere in due modi: *o si aggiunge al sistema delle forme quella data e si cercano le proprietà del sistema allargato nel senso del gruppo dato, o non si estende il sistema invariato, ma ci si limita a considerare tra le trasformazioni di base, contenute nel gruppo [principale], quelle che lasciano invariata la forma di base (e che formano necessariamente un [sotto]gruppo*).

---

[18] [Nota del 1921. Con il termine non mi riferisco, né qui né in seguito, a tutti gli invarianti razionali che corrispondono a una qualche forma prestabilita, né ai razionali esistenti tra di essi, né alle sigizie. Naturalmente, per il mio rapporto con Clebsch (che aveva pubblicato la sua *Teoria delle forme binarie* all'inizio del 1871), nel 1872 la questione mi era nota. Ciononostante non mi sono sentito vincolato ad essa. Con teoria degli invarianti di un gruppo, intendevo la teoria delle relazioni di una forma prestabilita che restano invariate per il gruppo. Si confronti anche la spiegazione data nel paragrafo 5 della mia seconda memoria sulla *Geometria non euclidea*. Alla teoria degli invarianti della geometria elementare appartiene in questo senso, per esempio, l'intera trigonometria sferica e piana, che comunque non si esaurisce con il suddetto schema.]

Affrontiamo ora la questione inversa di quella posta all'inizio del paragrafo, che risulta comprensibile da quanto precede. Richiediamo quelle proprietà degli oggetti dello spazio che non variano nelle trasformazioni del gruppo, che contiene il gruppo principale come sottogruppo. Ogni proprietà, trovata con tale ricerca, è una proprietà geometrica intrinseca all'oggetto, ma non vale il contrario. Nella reciproca entra in vigore il principio riportato, secondo cui il gruppo principale è il più piccolo possibile. Si ha quindi il teorema:

Sostituendo il gruppo principale con uno più esteso che lo contenga, si conserva solo una parte delle proprietà geometriche. Le altre non appaiono più come proprietà intrinseche degli enti geometrici, ma come proprietà del sistema ottenuto aggiungendo loro una forma [distinta] speciale, la quale (in quanto generalmente determinata[19]*) è definita dal fatto che, supponendola fissa, rende possibili per lo spazio, tra le trasformazioni del gruppo dato, solo le trasformazioni del gruppo principale.*

---

[19] Si genera, per esempio, una forma siffatta applicando le trasformazioni del gruppo principale a un elemento iniziale qualunque, non riprodotto da nessuna trasformazione del gruppo dato. [Nota del 1921. Questo teorema costituisce indubbiamente il punto centrale di tutto il mio programma. Per questa ragione gli autori l'hanno chiamato "teorema aggiunto". Ma, riferito agli invarianti razionali e alle sizigie, come nella nota precedente, subisce una cattiva interpretazione. Lo si deve assumere come semplice congettura, perché, interpretato in modo sbagliato, dà luogo a risultati errati. In quella frase si cerca molto di più di quanto è detto. Mi riferisco a ciò che Cayley ha scritto nella *Sixth Memoir upon Quantics* 1859 («Phil. Trans.» 1859, Coil. Pap., v. lI, pp. 560 e segg., in particolare all'osservazione finale p. 592) per il caso particolare della geometria proiettiva e della geometria metrica elementare, e a ciò che Laguene aveva già detto nelle sue pubblicazioni del 1853 alle pp. 242-243 in forma più dettagliata. Cayley scrive alla fine della sua memoria la seguente affermazione: «Metrical geometry is a part of descriptive geometry and descriptive geometry is all geometry and reciprocally». Intendo dire la stessa cosa in modo da evitare ogni malinteso. Ogni fatto della geometria elementare si può descrivere attraverso relazioni tra le tetracoordinate, purché si sappia come rappresentare il cerchio assoluto in coordinate rettilinee.
È opportuno aggiungere quanto segue. Il cerchio assoluto si può ottenere con una qualsiasi conica proiettiva non degenere. Il sistema di coordinate può quindi essere scelto in modo tale che la conica possa essere rappresentata nel suo piano, uguagliando a zero una qualsiasi forma ternaria di secondo grado, con determinante diverso da zero. Possiamo prendere come esempio una qualsiasi C_3 del piano con vertice all'infinito (che è una W-curva, cioè una curva trasformata in se stessa dal gruppo continuo di collineazioni a un parametro). Tutti i punti del piano che sono all'infinito, si trovano su una G_4, data dalle seguenti relazioni: $x' = \lambda x + a$, $y' = \lambda y + b$, $z' = \lambda z + c$.
Presa la C_3 come fissa, otteniamo una G_5 di collineazioni. Possiamo allora pensare di costruire una geometria che gli è propria. Se poi vogliamo classificare questa geometria all'interno della geometria proiettiva generale, non possiamo ovviamente aggiungere una C_3 che sta sul piano ma all'infinito (quest'ultima si ottiene ponendo uguale a zero una forma cubica ternaria generale). La forma, già specificata, deve essere invece assunta in modo tale che, posta uguale a zero, rappresenti una C_3 con vertice. L'ultima condizione è sufficiente, perché tutte le C_3 con vertice sono proiettivamente equivalenti. Ciò vale per tutti gli altri casi che si possano immaginare.]

Questa proposizione caratterizza i moderni indirizzi geometrici qui discussi e la loro relazione con il metodo elementare. A loro volta la loro caratteristica è che, invece di fondare le loro considerazioni sul gruppo principale, le fondano su gruppi più estesi di trasformazioni dello spazio. La loro reciproca relazione è determinata da un teorema analogo, purché i loro gruppi siano contenuti gli uni negli altri. Ciò vale anche per i differenti modi di trattare le varietà a più dimensioni, che dovrò considerare in seguito. Quanto detto verrà dimostrato per ogni singolo metodo. Così, i teoremi relativi al caso generale di questo paragrafo e del precedente, saranno illustrati da casi concreti.

§ 3. *La geometria proiettiva*

Ogni trasformazione dello spazio, non appartenente al gruppo principale, si può usare per trasportare proprietà di forme note in forme nuove. Così si sfrutta la geometria del piano per la geometria delle superfici rappresentabili sul piano. Analogamente, già prima della nascita di una vera e propria geometria proiettiva, si deducevano le proprietà di una figure data da quelle di altre, ottenute da per proiezione. La geometria proiettiva nacque una volta che ci si abituò a considerare la figura originaria come essenzialmente identica a quelle che se ne possono ottenere per proiezione, e a enunciare le proprietà, che si trasmettono per proiezione, in modo da evidenziarne l'indipendenza dai cambiamenti dovuti alla proiezione. Così *il trattamento*, nel senso del § 1, *si basava sul gruppo di tutte le trasformazioni proiettive*, contrapponendo la geometria proiettiva all'ordinaria.

Si può pensare uno sviluppo simile a quello qui descritto per qualsiasi tipo di trasformazioni dello spazio. Ci ritornerò sopra più volte. Nella stessa geometria proiettiva questo sviluppo ha preso due direzioni. Un ampliamento di vedute si è avuto ammettendo nel gruppo fondamentale delle trasformazioni le *trasformazioni duali*. Secondo l'attuale punto di vista, due figure duali non si considerano più come due figure differenti ma essenzialmente come la stessa figura. Si ottiene un'ulteriore estensione del gruppo fondamentale delle trasformazioni collineari e duali aggiungendo al gruppo le corrispondenti *trasformazioni immaginarie*. Questo passaggio ha determinato l'ampliamento dell'insieme degli elementi propri dello spazio, introducendo elementi immaginari – come l'inserimento delle trasformazioni duali nel gruppo fondamentale ha comportato l'introduzione simultanea del punto e del piano come elementi dello spazio. Non è questa la sede per mostrare l'utilità dell'introduzione degli elementi immaginari, grazie alla quale soltanto si ottiene l'esatta corrispondenza tra la scienza dello spazio e il dominio prescelto delle operazioni algebriche. Bisogna, però, sottolineare che gli elementi immaginari vengono introdotti proprio in considerazione delle operazioni algebriche e non in funzione del gruppo delle trasformazioni proiettive e duali. Così come possiamo limitarci alle trasformazioni reali, perché le collineazioni reali e duali formano un gruppo. Possiamo ben introdurre elementi immaginari anche quando non ci poniamo dal punto di vista proiettivo. Lo dobbiamo fare in linea di principio studiando forme algebriche.

Il teorema generale del paragrafo precedente mostra come vanno concepite dal punto di vista proiettivo le proprietà metriche. Vanno considerate come relazioni proiettive rispetto a una forma fondamentale: il cerchio immaginario all'infinito.[20] Questa forma ha la proprietà di trasformarsi in se stessa solo per mezzo di quelle trasformazioni del

[20] Questa concezione va considerata come una delle performance più belle di von Chasles (1793-1880) [di scuola francese, aggiunge il traduttore francese]. Da sola conferisce un senso preciso alla distinzione, da collocare al vertice della geometria proiettiva, tra proprietà metriche e proprietà descrittive.

gruppo proiettivo che appartengono anche al gruppo principale. Il teorema appena formulato ha bisogno di essere completato, dato che abitualmente ci limitiamo a considerare enti reali dello spazio (e trasformazioni reali). Allora, per rendere giustizia a questo punto di vista, bisogna ancora aggiungere espressamente al cerchio immaginario all'infinito il sistema degli enti (punti) reali dello spazio; le proprietà della geometria elementare sono proiettive o come proprietà delle figure in sé o in relazione al sistema degli elementi reali o al cerchio immaginario all'infinito, o anche tutte e due insieme.

Si può ora ricordare il modo in cui von Staudt, nella sua *Geometria di Posizione* (1847), costruisce la geometria proiettiva, cioè quella geometria il cui gruppo fondamentale comprende solo le trasformazioni reali, proiettive e duali.[21] È noto che nell'ordinario materiale di osservazione von Staudt considera solo i fattori che non variano nelle trasformazioni proiettive. Volendo arrivare a considerare le proprietà metriche, bisognerebbe ovviamente introdurre queste ultime come relazioni rispetto al cerchio immaginario all'infinito. L'ordine di pensieri, così completato, risulta di grande importanza, per le considerazioni esposte in precedenza, in quanto consente di costruire di fatto la geometria, secondo lo spirito di ciascuno dei singoli metodi che tratterò in seguito.

4. § *Trasporto per applicazione*

Prima di proseguire a discutere altri metodi geometrici oltre le geometrie elementare e proiettiva, svilupperò in via generale alcuni argomenti che ritorneranno spesso in seguito, e per i quali le cose accennate finora costituiscono già sufficienti esempi. A queste considerazioni si riferiscono il paragrafo presente e il seguente.

Sia data una varietà A con B gruppo fondamentale. Se si trasforma A, per mezzo di una qualche trasformazione, in un'altra varietà A', il gruppo delle trasformazioni B, che riproducono A, diviene un gruppo B', le cui trasformazioni si riferiscono ad A'. Allora è evidente il principio secondo cui *il modo di trattare A prendendo B come base conduce a quello di trattare A' prendendo B' come base*. In altre parole, ogni proprietà di una forma contenuta in A, relativamente al gruppo B, diventa una proprietà della forma corrispondente di A', relativamente al gruppo B'.

Suppongo, a titolo d'esempio, che A sia una retta e B le trasformazioni lineari a tre parametri che trasformano la retta A in se stessa. Il modo di trattare A è quindi quello che nell'algebra moderna si chiama la teoria delle forme binarie.[22] Ora, si può mettere in corrispondenza la retta e una sezione conica per proiezione da uno dei punti della conica. Dalle trasformazioni lineari B, che riproducono la retta, si ottengono, come si può facilmente vedere, le trasformazioni lineari B', che riproducono la conica: cioè le trasformazioni della conica corrispondenti alle trasformazioni lineari del piano che trasportano in sé la conica.

Ma, per il principio del secondo paragrafo,[23] è la stessa cosa analizzare la geometria su una conica, supponendola fissa e considerando solo quelle trasformazioni lineari del piano che la trasformano in se stessa, o studiare la geometria sulla conica, considerando

[21] Solo nelle *Beiträge zur Geometrie der Lage* von Staudt (1856) assume come base il gruppo più esteso, comprendente anche le trasformazioni immaginarie.

[22] [Una forma algebrica è un'espressione in due o più variabili collegate da operazioni algebriche. Una forma algebrica di dice lineare, quadratica o cubica in funzione delle potenze delle variabili, e binaria, ternaria, quaternaria in funzione del numero delle variabili.]

[23] Va detto che il principio è applicato qui in forma un po' più generale.

in generale le trasformazioni lineari del piano e lasciando variare la conica con le altre [forme].

Le proprietà che abbiamo individuato nei sistemi di punti della conica sono dunque proiettive nel senso usuale del termine. Collegando quest'ultima considerazione al risultato precedente, si ottiene:

La teoria delle forme binarie e la geometria proiettiva dei sistemi di punti di una conica sono la stessa cosa, cioè ogni teorema relativo alle forme binarie corrisponde a un teorema relativo ai sistemi di punti di una conica, e viceversa.[24]

Un altro esempio, adatto a chiarire considerazioni di questo genere, è il seguente. Quando si proietta stereograficamente una superficie di secondo grado su di un piano, si presenta sulla superficie un punto fondamentale, il punto di proiezione. Nel piano se ne presentano due: le immagini delle generatrici passanti per il punto di proiezione. Si vede immediatamente che le trasformazioni lineari del piano, che non alterano nessuno dei due punti fondamentali, sono dalla rappresentazione stereografica portate in trasformazioni lineari della superficie di secondo grado in se stessa, ma solo in quelle che lasciano invariato il centro di proiezione. (Per trasformazioni lineari della superficie in se stessa si intendono le trasformazioni alle quali la superficie è sottoposta, quando si effettuano trasformazioni lineari dello spazio che la portano a coincidere con se stessa.) In questo modo, divengono identici lo studio proiettivo di un piano, quando si assumono come fondamentali due punti, e quello di una superficie di secondo grado, quando se ne assume uno. Il primo – se si considerano elementi immaginari – non è altro che lo studio del piano nel senso della geometria elementare. Infatti, il gruppo principale di trasformazioni del piano si compone proprio di quelle trasformazioni lineari che non alterano una coppia di punti (i punti ciclici). In conclusione, otteniamo:

La geometria elementare del piano e lo studio proiettivo di una superficie di secondo grado, quando si assume un punto fondamentale, sono identici.

Si possono moltiplicare a piacere gli esempi.[25] Abbiamo adottato i due precedenti perché in seguito avremo modo di riprenderli.

§ 5. *Arbitrarietà di scelta dell'elemento dello spazio. Principio di trasporto di Hesse. Geometria lineare*

Come elemento della retta, del piano, dello spazio, e in generale della varietà in studio, si può prendere, invece del punto, una qualunque forma contenuta nella varietà: gruppi di punti, oppure curve, superfici, ecc.[26]. Essendo il numero di parametri arbitrari non determinato a priori, dopo la scelta dell'elemento, la retta, il piano e lo spazio si presenteranno con un numero arbitrario di dimensioni. Ma, *una volta posto a base della ricerca geometrica lo stesso gruppo di trasformazioni, il contenuto della geometria non varia.* In altri termini, ogni teorema relativo all'elemento scelto resta tale anche con un elemento diverso. Cambia solo l'ordine e la concatenazione dei teoremi.

---

[24] Invece di una conica del piano si può prendere altrettanto bene una curva di terzo ordine dello spazio e analogamente nello spazio a *n* dimensioni.

[25] Per altri esempi, nonché per l'estensione a un numero maggiore di dimensioni, cfr. il mio *Über Liniengeometrie und metrische Geometrie*, "Math. Annalen, v. 2 e i lavori di Lie citati in seguito.

[26] Cfr. Nota 4 dell'annesso. *Sulle varietà a numero qualunque di dimensioni.*

L'essenziale, pertanto, è il gruppo di trasformazioni. Il numero di dimensioni, attribuito alla varietà, è secondario.

La connessione di questa osservazione con il principio del paragrafo precedente conduce a una serie di belle applicazioni. Ne presenterò alcune, perché gli esempi mi sembrano più appropriati di ogni lunga spiegazione per rendere il senso di considerazioni generali.

Per il paragrafo precedente, la geometria proiettiva della retta (la teoria delle forme binarie) equivale alla geometria proiettiva su una conica. Su quest'ultima, possiamo ora, al posto del punto, considerare come elemento base la coppia di punti. Infatti, si può stabilire una corrispondenza fra l'insieme di coppie di punti della conica e l'insieme di rette del piano, associando a ogni coppia di punti la retta che in essi interseca la conica. Con questa rappresentazione, le trasformazioni lineari della sezione conica in sé vanno nelle trasformazioni del piano, considerato come composto di rette, che lasciano invariata la conica. Ora, per il paragrafo 2, è la stessa cosa considerare il gruppo formato da queste ultime trasformazioni o partire dalla totalità delle trasformazioni lineari del piano, aggiungendo di volta in volta la conica alle forme del piano da studiare. Da tutto ciò consegue che:

La teoria delle forme binarie e la geometria proiettiva del piano con una conica fondamentale sono equivalenti.

Infine, dato che, in ragione dell'identità dei gruppi, la geometria proiettiva del piano con una conica fondamentale coincide con quella geometria metrico-proiettiva che si può costruire nel piano su di una conica,[27] possiamo anche dire che:

La teoria delle forme binarie e la geometria metrico-proiettiva generale del piano sono la stessa geometria.

Nell'analisi che precede, si potrebbe sostituire la conica del piano con una curva del terzo ordine nello spazio, ecc., ma non entrerò in maggiori dettagli. La relazione, qui presentata, tra geometria del piano, dello spazio o di una varietà a un numero qualunque di dimensioni, è in sostanza il principio di trasporto di Hesse (Borchardts Journal, vol. 66, 1866).

La geometria proiettiva dello spazio o, in altre parole, la teoria delle forme quaternarie costituisce un esempio analogo. Assumendo la retta come elemento dello spazio e attribuendole, secondo la geometria delle linee, sei coordinate omogenee tra le quali sussiste una relazione espressa da un'equazione di secondo grado, le trasformazioni lineari e per dualità dello spazio si presentano come quelle trasformazioni lineari delle sei variabili, supposte indipendenti, che trasformano in se stessa l'equazione suddetta. Attraverso una serie di considerazioni analoghe a quelle testé presentate, si ottiene il teorema:

La teoria delle forme quaternarie coincide con la determinazione metrico-proiettiva in una varietà rappresentabile per mezzo di sei variabili omogenee.

Per un'esposizione più dettagliata di questo punto di vista, rimando a un saggio che sta per essere pubblicato nei Math. Annalen, vol. 6, *Sulla cosiddetta geometria non euclidea, seconda parte*, e, inoltre, a una nota qui annessa.[28]

---

[27] Cfr. Nota 5 dell'annesso. *Sulla cosiddetta geometria non euclidea.*

Alle considerazioni precedenti aggiungo ancora due osservazioni. In effetti, la prima è implicita in quanto precede, ma è meglio esplicitarla, perché si riferisce a un tema facile da fraintendere.

Introducendo come elementi spaziali forme arbitrarie, lo spazio acquisisce un numero arbitrario di dimensioni. Ma, attenendoci al punto di vista abituale (elementare o proiettivo), il gruppo da assumere come fondamentale per la varietà a più dimensioni è dato dall'inizio, ed è, rispettivamente, o il gruppo principale o il gruppo delle trasformazioni proiettive. Assumendo come fondamentale un altro gruppo, dobbiamo abbandonare sia il punto di vista elementare, sia quello proiettivo. Pertanto, se è vero che, mediante una scelta appropriata degli elementi dello spazio, quest'ultimo può rappresentare varietà a quante si vogliano dimensioni, è anche importante aggiungere che, *con questa rappresentazione, o bisogna assumere sin dall'inizio a base della trattazione della varietà un determinato gruppo, oppure, se ci si vuole riservare la scelta del gruppo, dobbiamo uniformare a quest'ultimo il nostro modo di concepire la geometria*.

Senza questa osservazione, si potrebbe, per esempio, cercare una rappresentazione della geometria delle linee nel seguente modo. Nella geometria delle linee la retta possiede sei coordinate, tante quanti sono i coefficienti della conica nel piano. La rappresentazione della geometria delle linee sarebbe allora la geometria di un sistema di coniche scelto dalla totalità delle coniche attraverso un'equazione di secondo grado tra i coefficienti. Ciò è vero, assumendo come gruppo fondamentale della geometria piana la totalità delle trasformazioni lineari dei coefficienti della conica, che trasformano in sé l'equazione condizionante di secondo grado. In questo caso, però, se ci atteniamo alla trattazione elementare o proiettiva della geometria piana, non otteniamo nessuna rappresentazione.

La seconda osservazione si riferisce alla seguente nozione. Sia dato nello spazio un gruppo qualunque come gruppo principale. Si scelga una particolare forma, per esempio un punto, o una retta, o anche un ellissoide, ecc., e le si applichino tutte le trasformazioni del gruppo principale. Si ottiene così una varietà a un numero di dimensioni che è in generale uguale al numero dei parametri arbitrari contenuti nel gruppo. In certi casi particolari, questo numero è inferiore. Ciò accade quando la forma scelta all'origine ha la proprietà di essere riprodotta in sé da un numero infinito di trasformazioni. Ogni varietà così generata si chiama, relativamente al gruppo che la genera, *corpo*.[29] Volendo studiare lo spazio in senso gruppale e assumere una determinata forma come elemento dello spazio, in modo che cose equivalenti non siano rappresentate in modo diverso, *dobbiamo chiaramente scegliere gli elementi dello spazio in modo che la varietà o formi essa stessa un corpo o possa essere scomposta in corpi*.[30] Nel § 9 darò un'applicazione di questa evidente osservazione. La stessa nozione di corpo si ripresenta nel paragrafo conclusivo, associata a nozioni affini.

---

[28] Cfr. Nota 6 dell'annesso. *Geometria delle linee come studio di una varietà a curvatura costante.*

[29] Nella scelta del nome ho seguito Dedekind, che in teoria dei numeri chiama *corpo* un insieme di numeri, ottenuto da elementi dati mediante operazioni date (Seconda edizione delle lezioni di Dedekind sulla teoria dei numeri).

[30] [Nota del 1893. Il testo non dà sufficiente rilievo al fatto che il gruppo proposto può contenere i cosiddetti *sottogruppi eccezionali*. Se una forma geometrica rimane inalterata in seguito alle operazioni di un sottogruppo eccezionale, rimangono inalterate anche tutte quelle forme che si ottengono da essa mediante le operazioni dell'intero gruppo, e quindi per tutti gli elementi del corpo che da essa risultano. Ma un corpo così costituito sarebbe del tutto inadatto a rappresentare

§ 6. *La geometria dei raggi reciproci. Interpretazione di x + iy.*

In questo § torno sui differenti indirizzi di ricerca geometrica, come nei §§ 2 e 3.

Da più punti di vista si possono considerare come un frammento di geometria proiettiva un'intera classe di considerazioni geometriche in cui si fa uso costante delle trasformazione per raggi reciproci. Vi rientrano le ricerche relative alle cosiddette ciclidi e alle superfici anallagmatiche, la teoria generale dei sistemi ortogonali, e anche le ricerche sul potenziale e così via. Il fatto che, contrariamente a quanto accaduto per la geometria proiettiva, le considerazioni relative a queste teorie non siano ancora state unificate in una specifica geometria, *che dovrebbe avere come gruppo fondamentale l'insieme delle trasformazioni del gruppo principale, composte con la trasformazione per raggi reciproci*, va attribuito alla circostanza causale che le suddette teorie non sono state finora presentate in connessione reciproca. I singoli autori che hanno lavorato in questo senso non sono andati lontano da questa concezione di metodo.

L'analogia fra geometria dei raggi reciproci e geometria proiettiva risulta evidente al primo confronto. Pertanto, mi basta richiamare le poche generalità seguenti.

In geometria proiettiva i concetti elementari sono il punto, la retta e il piano. Il cerchio e la sfera sono casi speciali di coniche e di superfici di secondo grado. L'infinito della geometria elementare si presenta come piano, mentre la forma fondamentale, cui si riferisce la geometria elementare, è una conica immaginaria all'infinito.

Nella geometria dei raggi reciproci, i concetti elementari sono il punto, il cerchio e la sfera. La retta e il piano sono loro casi speciali in cui il cerchio e la sfera possiedono un certo punto, il punto all'infinito, che però non si distingue dagli altri. Si ottiene la geometria elementare, pensando fisso il punto all'infinito.

La geometria dei raggi reciproci è suscettibile di presentazione che si avvicina alla teoria delle forme binarie e alla geometria delle linee, quando questa venga trattata nel modo indicato nel precedente paragrafo. Per conseguire un tale risultato, mi limito a trattare la geometria piana e quindi la geometria dei raggi reciproci nel piano.[31]

Ho già considerato la connessione tra geometria elementare del piano e geometria proiettiva su di una superficie di secondo grado fornita di un particolare punto (§ 4). Prescindendo da questo punto e trattando la geometria proiettiva sulla superficie in sé, si ottiene una rappresentazione della geometria dei raggi reciproci nel piano. È facile convincersi[32] che la totalità delle trasformazioni lineari di questa superficie in sé corrisponde al gruppo di trasformazioni dei raggi reciproci nel piano in ragione della rappresentazione della superficie di secondo grado. Si ha quindi:

La geometria dei raggi reciproci nel piano e la geometria proiettiva su di una superficie di secondo grado sono la stessa cosa;

e analogamente:

---

le operazioni del gruppo. Si deve quindi tenere conto solo di quei corpi che risultano da elementi dello spazio che non rimangono inalterati in nessun sottogruppo eccezionale del gruppo proposto.]

[31] La geometria dei raggi reciproci sulla retta equivale allo studio proiettivo della retta, dato che le trasformazioni sono le stesse da una parte e dall'altra. Nella geometria dei raggi reciproci si può parlare di *birapporto* di quattro punti su una retta e su una circonferenza.

[32] Cfr. *Über Liniengeometrie und metrische Geometrie*, cit.

La geometria dei raggi reciproci nello spazio è identica alla trattazione proiettiva di una varietà rappresentata da un'equazione di secondo grado di cinque variabili omogenee.

Allora, la geometria nello spazio si collega, grazie alla geometria dei raggi reciproci, a una varietà a quattro dimensioni, così come la geometria delle linee si collega a una varietà a cinque dimensioni.

Limitatamente alle trasformazioni *reali*, la geometria dei raggi reciproci nel piano permette una rappresentazione e un'applicazione interessanti. Infatti, estesa sul piano nel modo usuale la variabile complessa $x + iy$, alle sue trasformazioni lineari corrisponde il gruppo dei raggi reciproci, con la suddetta restrizione alle trasformazioni reali.[33] Lo studio delle funzioni di una variabile complessa, soggetta a trasformazioni lineari arbitrarie è, presentato in altro modo, ciò che si chiama teoria delle forme binarie. Perciò:

La teoria delle forme binarie trova la propria rappresentazione nel piano reale per mezzo della geometria dei raggi reciproci, purché si rappresentino anche i valori complessi delle variabili.

Possiamo risalire dal piano alla superficie di secondo grado, per portarci nell'ambito più familiare delle trasformazioni proiettive. Avendo considerato solo elementi reali del piano, la scelta della superficie non può essere arbitraria. Infatti, non deve essere rigata. In particolare, possiamo pensare che essa sia una sfera, come del resto si fa anche per interpretare una variabile complessa, e otteniamo allora il teorema:

La teoria delle forme binarie di variabili complesse trova la propria rappresentazione nella geometria proiettiva della superficie sferica reale.

Ho ritenuto opportuno riferire in una nota[34] quanto questa rappresentazione chiarisca la teoria delle forme binarie cubiche e biquadratiche.

§ 7. *Estensioni. Geometria della sfera di Lie.*

Alla teoria delle forme binarie, alla geometria dei raggi reciproci e alla geometria delle linee, che ho precedentemente correlato e che sembrano differire solo per il numero delle variabili, si ricollegano certe estensioni che ora esporrò. Tali estensioni contribuiscono a chiarire con nuovi esempi l'idea che il gruppo, che stabilisce il modo di trattare certi domini, può essere esteso a piacere. Ora intendo collegare le considerazioni fatte da Lie in una recente memoria[35] con le riflessioni qui presentate. La via per la quale giungo alla geometria della sfera di Lie differisce da quella da lui

---

[33] [Nota del 1893. Il modo di esprimersi del testo non è esatto. Le trasformazioni lineari

$$z' = (az + b)/(cz + d),$$

dove $z' = x' + iy'$ e $z = x + iy$, corrispondono soltanto alle trasformazioni del gruppo dei raggi reciproci che non ribaltano gli angoli e non permutano tra loro i punti ciclici. Per comprendere tutto il gruppo dei raggi reciproci occorre aggiungere alle precedenti le non meno importanti trasformazioni

$$z' = (a\bar{z} + b)/(c\bar{z} + d),$$

dove $z' = x' + iy$ e $\bar{z} = x - iy$.]

[34] Cfr. Nota 7 dell'annesso.

[35] *Partielle Differentialgleichungen und Complexe*, "Math. Annalen", V, 1872.

percorsa. Lie si collega a concetti della geometria delle linee, mentre io, per attenermi maggiormente all'intuizione geometrica ordinaria e per rifarmi al discorso precedente, nella mia esposizione assumo un numero minore di variabili. I diversi modi di trattare il problema non dipendono dal numero delle variabili, come già evidenziato da Lie,[36] ma appartengono a quel vasto settore di ricerche che si occupa dello studio proiettivo delle equazioni di secondo grado a un qualsiasi numero di variabili, ricerche alle quali ho già accennato spesso e che incontreremo ancora più volte (cfr. § 10 e altri).

Mi rifaccio alla corrispondenza per proiezione stereografica tra il piano reale e la sfera. Nel § 5 ho già correlato la geometria del piano con la geometria su una sezione conica, facendo corrispondere a ogni retta del piano la coppia di punti in cui interseca la conica. Analogamente, posso stabilire una relazione tra geometria dello spazio e la geometria della sfera, facendo corrispondere a ogni piano dello spazio il cerchio nel quale il piano taglia la sfera. Trasportando per proiezione stereografica la geometria della sfera al piano, ogni cerchio si trasforma in un cerchio, e avremo ancora *una corrispondenza fra geometria dello spazio, che ha come elemento il piano e per gruppo le trasformazioni lineari che trasformano la sfera in se stessa, e geometria del piano, il cui elemento è il cerchio e il cui gruppo è il gruppo dei raggi reciproci*.

Voglio adesso ampliare in due diversi modi la prima di queste geometrie. Assumo in essa, invece del suo gruppo, un gruppo più esteso. L'estensione che ne risulta si trasferisce immediatamente per rappresentazione alla geometria del piano.

Invece delle trasformazioni lineari dello spazio, costituito da piani, che trasformano la sfera in se stessa, posso scegliere, è evidente che posso scegliere sia la totalità delle trasformazioni lineari dello spazio, sia la totalità delle trasformazioni di piani dello spazio, trasformazioni che lasciano invariata la sfera. Nel primo caso, prescindo dalla sfera; nel secondo, dalla linearità delle trasformazioni. La prima generalizzazione è immediatamente evidente e posso, quindi, trattarla subito e vedere che cosa significhi per la geometria piana. Sulla seconda, tornerò successivamente, quando avrò determinato la trasformazione più generale che le corrisponde.

Le trasformazioni lineari dello spazio hanno in comune la proprietà di trasformare fasci e stelle di piani[37] rispettivamente in fasci e stelle di piani. Ma il fascio di piani trasportato sulla sfera crea un fascio di cerchi, che si tagliano negli stessi punti, cioè una serie infinita e a un solo parametro; la stella di piani crea una stella di cerchi, cioè una serie infinita e a due parametri di cerchi che sono perpendicolari al cerchio fisso (al cerchio il cui piano è il piano polare del punto comune della stella di piani). Alle trasformazioni lineari dello spazio corrispondono allora sulla sfera, e quindi sul piano, trasformazioni di cerchi con la proprietà caratteristica di trasformare fasci e stelle di cerchi rispettivamente in fasci e stelle di cerchi.[38] *La geometria piana, che si ottiene con questo gruppo di trasformazioni, è la rappresentazione della ordinaria geometria proiettiva dello spazio.* In questa geometria, non si potrà usare il punto come elemento del piano, perché i punti, a causa del gruppo di trasformazioni scelto, non formano un corpo (§ 5). Si sceglieranno allora i cerchi.

Per la seconda estensione menzionata, va risolta innanzitutto la questione della natura del corrispondente gruppo di trasformazioni. Si tratta perciò di trovare trasformazioni di piani che trasformano fasci di piani, con l'asse tangente alla sfera, in fasci dello stesso tipo. Per brevità, posso invertire per dualità il problema e,

---

[36] *Göttinger Nachrichten*, Nr. 7, 22, 1871.

[37] [Un fascio di piani è l'insieme dei piani passanti per una retta comune (asse). Una stella di piani è l'insieme di piani passanti per un punto comune (centro).]

[38] Grassmann tratta di sfuggita queste trasformazione nella sua *Ausdehnungslehre* (p. 278 dell'edizione del 1862).

inoltre, ridurre di uno il numero di dimensioni. Cerco allora le trasformazioni di punti del piano, che trasformano le tangenti alla conica data in altre tangenti. A questo scopo, considero il piano e la sua conica come la proiezione di una superficie di secondo grado da un punto dello spazio che non si trovi sulla superficie in modo che la conica data rappresenti la curva di confine. Alle tangenti della conica corrispondono le generatrici della superficie. Il problema si riduce a quello di trovare l'insieme delle trasformazioni per punti che riproducono la superficie, lasciando invariate le generatrici.

Di trasformazioni del genere ce ne sono infinite a piacere, perché basta considerare il punto della superficie come intersezione delle generatrici di ciascun sistema e trasformare in se stesso in qualsiasi maniera ciascuno di questi sistemi. Tra queste trasformazioni si trovano anche quelle lineari. Voglio trattare solo queste ultime. Se, infatti, non avessimo a che fare con una superficie, ma con una varietà a più dimensioni, rappresentata da un'equazione di secondo grado, rimarrebbero solo le trasformazioni lineari e le altre scomparirebbero.[39]

Queste trasformazioni lineari che riproducono la superficie in se stessa, trasportate sul piano per proiezione (non stereografica), divengono trasformazioni di punti a due valori. Quindi, a ogni tangente alla conica di confine corrisponde di nuovo una tangente, ma ad ogni altra retta corrisponde in generale una conica che tocca due volte la conica di confine. Questo gruppo di trasformazioni può essere convenientemente caratterizzato, fondando sulla conica di passaggio una determinazione metrica proiettiva. Le trasformazioni hanno allora la proprietà di trasformare punti, che, a seconda della metrica, hanno distanza nulla tra di loro, oppure punti che hanno una distanza costante da uno stesso punto, in punti dello stesso tipo.

Tutte queste considerazioni si possono estendere a un qualsiasi numero di variabili, in particolare si possono applicare alla questione iniziale relativa alla sfera e al piano presi come elementi. Al risultato si può dare una forma particolarmente intuitiva, perché l'angolo formato da due piani, secondo la metrica proiettiva fondata su una sfera, è uguale all'angolo, nel senso ordinario, formato dai cerchi di intersezione dei piani con la sfera.

Otteniamo così sulla sfera e successivamente sul piano un gruppo di trasformazioni di cerchi che hanno la proprietà di trasformare cerchi tangenti l'uno con l'altro (che racchiudono un angolo nullo), e di trasformare cerchi, che tagliano un altro cerchio sotto lo stesso angolo, in cerchi dello stesso tipo. Nel gruppo di queste trasformazioni sono contenute quelle lineari sulla sfera e quelle dei raggi reciproci sul piano.[40]

---

[39] Proiettando stereograficamente la varietà, si ottiene il noto teorema: *Nei domini a più dimensioni (e già nello spazio tridimensionale) non esistono trasformazioni puntuali conformi (che conservano gli angoli) al di fuori delle trasformazioni del gruppo dei raggi reciproci. Per contro nel piano ne esistono infinite.* Cfr. i lavori citati di Lie.

[40] [Nota del 1893. Le considerazioni del testo si chiariscono meglio aggiungendo qualche formula analitica. Sia

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$$

l'equazione della sfera che riferiamo stereograficamente al nostro piano, nelle ordinarie coordinate tetraedriche. Le x che soddisfano questa equazione acquistano per noi il significato di coordinate tetracicliche nel piano, e

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$$

diviene l'equazione generale del cerchio nel piano. Calcolando il raggio del cerchio così rappresentato, si incontra la radice quadrata

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$$

Ora, la geometria del cerchio fondata su questo gruppo è analoga alla geometria delle sfere, che Lie ha delineato per lo spazio e che sembra di grande importanza per le ricerche sulla curvatura delle superfici. Essa comprende la geometria dei raggi reciproci, così come questa comprende la geometria elementare.

Le ormai acquisite trasformazioni di cerchi (di sfere) hanno in particolare la proprietà di trasformare cerchi (sfere) tangenti in altri dello stesso tipo. Se consideriamo tutte le curve (superfici) come inviluppi di cerchi (sfere), allora curve (superfici) tangenti saranno trasformate in altre dello stesso tipo. Le trasformazioni in questione appartengono alla classe delle trasformazioni per contatto le cui generalità tratterò in seguito. Si tratta di trasformazioni per cui il contatto tra forme costituite da punti è un rapporto invariante. Le trasformazioni di cerchi, menzionate all'inizio del §, accanto alle quali si possono porre le analoghe trasformazioni della sfera, non sono trasformazioni per contatto.

Le due estensioni, precedentemente collegate solo alla geometria dei raggi reciproci, si possono generalizzare alla geometria delle linee, in particolare allo studio proiettivo di una varietà individuata da un'equazione di secondo grado. Avendo già trattato l'argomento, non aggiungerò altro.

§ 8. *Enumerazione di altri metodi basati su trasformazioni di punti*

Prescindendo dalle trasformazioni per dualità, che comportano il cambiamento dell'elemento dello spazio, geometria elementare, geometria dei raggi reciproci e geometria proiettiva sono casi particolari dei numerosi metodi fondati in generale sui gruppi di trasformazioni di punti. In questa sede, segnalerò solo i tre seguenti metodi, che coincidono con i suddetti solo in questo. Benché questi metodi non siano ancora tanto avanzati da costituirsi in discipline autonome, come la geometria proiettiva, è tuttavia facile riconoscere che sono presenti nelle più recenti ricerche.[41]

8.1 *Il gruppo delle trasformazioni razionali*

Per quel che riguarda le trasformazioni razionali, bisogna distinguere se esse sono razionali per *tutti* i punti del dominio nel quale si opera, cioè lo spazio o il piano, ecc., oppure se lo sono solo per i punti di una varietà contenuta nel dominio, cioè di una superficie, di una curva. Per progettare una geometria dello spazio o del piano, nel senso di cui sopra, si possono usare solo le prime. Dal mio il punto di vista, le altre acquistano

---

che indico con iu_5. Posso ora considerare i cerchi come elementi del piano. Il gruppo dei raggi reciproci si presenta allora come la totalità delle trasformazioni lineari omogenee di u_1, u_2, u_3, u_4 tali che

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

si trasforma in un proprio multiplo. Invece il gruppo più esteso che corrisponde alla geometria delle sfere di Lie si compone delle trasformazioni lineari omogenee delle cinque variabili u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 che trasformano

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2$$

in uno dei suoi multipli.]

[41] [Nota del 1893. Mentre negli esempi fin qui presentati si trattava di gruppi con un numero finito di parametri, ora compaiono i cosiddetti gruppi infiniti.] [Nota del 1921. Per evitare malintesi va osservato che nelle successive ricerche di Lie il concetto di gruppo infinito è più ristretto, essendo limitato a quei gruppi che si possono definire mediante equazioni differenziali.]

significato solo quando si debba studiare la geometria su di una superficie o su di una curva date. La stessa distinzione si applica nell'*Analysis situs*, introdotta fra breve.

Le ricerche finora svolte, qua e là, si sono occupate essenzialmente di trasformazioni del secondo tipo. Dato che in questione non era la geometria su superfici o su curve, ma si trattava di trovare criteri attraverso i quali due superfici o due curve potessero essere trasformate l'una nell'altra, ricerche del genere esulano dal tema qui trattato.[42]
Lo schematismo generale presentato non ricopre tutta la matematica, bensì riporta certi suoi indirizzi a un punto di vista comune.

Per una geometria delle trasformazioni razionali, fondata sulle trasformazioni del primo tipo, siamo solo agli inizi. Nelle forme di prima specie,[43] come la linea retta, le trasformazioni razionali sono identiche a quelle lineari e non presentano quindi nulla di nuovo. Si conosce la totalità delle trasformazioni razionali nel piano (le *trasformazioni Cremoniane*). Si sa che si possono ottenere dalla composizione delle trasformazioni di secondo grado. Si conoscono anche i caratteri invarianti delle curve piane: il loro genere, l'esistenza dei moduli, ma queste considerazioni non sono ancora state sviluppate in una vera e propria geometria del piano nel senso qui discusso. Per lo spazio, l'intera teoria sta sorgendo adesso. Si conoscono finora solo poche trasformazioni razionali e queste si utilizzano per mettere in relazione, attraverso la rappresentazione, superfici note con altre ignote.

8.2 *L'Analysis situs*

Nella cosiddetta *Analysis situs*, si cerca ciò che non varia per trasformazioni ottenute componendo deformazioni infinitamente piccole.[44] Anche qui, come già detto, occorre distinguere il caso in cui oggetto delle trasformazioni l'intero dominio, per esempio lo spazio, o invece solo una particolare varietà ivi contenuta, per esempio una superficie. Le trasformazioni del primo tipo sono quelle che si potrebbero porre a fondamento di una geometria dello spazio. Il loro gruppo sarebbe costituito in modo essenzialmente diverso da quelli fin qui considerati. Dato che dovrebbe comprendere tutte le trasformazioni ottenute componendo trasformazioni per punti, infinitesime e reali, un tale gruppo è per principio limitato ai soli elementi reali dello spazio, e corrisponde al dominio della funzione arbitraria. È possibile estendere questo gruppo di trasformazioni

---

[42] [Nota del 1893. Esse troverebbero ugualmente posto qui, considerandole in un altro modo, possibilità che nel 1872 non mi era ancora nota. Data una forma algebrica (curva o superficie, ecc.) qualsiasi la si trasporti in uno spazio superiore, introducendo come coordinate omogenee i rapporti dei relativi integrandi di prima specie F_1: F_2: …: F_p. In questo spazio va messo a base di ulteriori considerazioni il gruppo delle trasformazioni lineari omogenee delle F. Cfr. i lavori di Brill, Nöther e Weber e la mia memoria: *Zur Theorie der Abelschen Funktionen* nel vol. 36 dei «Math. Annalen».] [Nota del 1921. Anche negli esempi dei precedenti §§ si poteva sostituire il gruppo considerato con un gruppo di trasformazioni lineari, assumendo uno spazio più ampio scelto opportunamente. La ricerca può quindi essere svolta in termini proiettivi. La questione di come si possa da ciò estrapolare un principio generale appare sempre più ardua.]

[43] [La denominazione di forme di prima, seconda, terza specie fu introdotta in geometria proiettiva da Steiner. Le forme di prima specie sono definite da un solo parametro, per esempio la retta di punti, il fascio di piani. Le forme di seconda specie sono definite da due parametri, per esempio, il piano di punti, il piano rigato, la stella di piani. Le forme di terza specie sono definite da tre parametri, per esempio lo spazio di punti.]

[44] [Oggi si direbbe: "componendo trasformazioni biunivoche e bicontinue".]

in modo non banale collegandolo alle collineazioni lineari che modificano anche gli elementi all'infinito.

8.3 *Il gruppo di tutte le trasformazioni per punti*

Sebbene rispetto a questo gruppo nessuna superficie possegga proprietà individuali, poiché ciascuna di esse può essere trasformata in ogni altra attraverso le trasformazioni del gruppo, esistono tuttavia forme di ordine superiore per il cui studio il gruppo di tutte le trasformazioni trova applicazioni vantaggiose. Per la concezione di fondo della geometria è relativamente indifferente che queste forme siano state considerate finora non tanto come forme geometriche ma quasi esclusivamente come forme analitiche, che occasionalmente hanno trovato applicazioni in geometria e che per studiarle siano stati introdotti processi (per esempio, proprio quello delle trasformazioni puntuali arbitrarie), solo di recente considerati anche come trasformazioni geometriche. A queste forme analitiche, appartengono innanzitutto le espressioni differenziali omogenee, poi le equazioni differenziali alle derivate parziali. Tuttavia, per la discussione generale delle ultime sembra, come dimostrerò nel § successivo, che per il loro studio sia più vantaggioso il gruppo più ampio di tutte le trasformazioni per contatto.

Il teorema principale della geometria, che abbia come gruppo fondamentale quello di tutte le trasformazioni puntuali, è che *una tale trasformazione è sempre equivalente, in una parte infinitamente piccola dello spazio, a una trasformazione lineare*. Gli sviluppi della geometria proiettiva sono quindi validi anche nell'infinitamente piccolo, comunque si scelga il gruppo per trattare le varietà, ed *è proprio questo un carattere distintivo del punto di vista proiettivo*.

Dopo aver parlato a lungo del rapporto fra i diversi modi di trattamento, fondati su gruppi che si contengono l'un l'altro, posso dare adesso un ulteriore esempio della teoria generale del § 2. Posso porre la questione di come concepire, dal punto di vista di "tutte le trasformazioni per punti", le usuali proprietà proiettive, prescindendo dalle trasformazioni per dualità, che comunque appartengono al gruppo della geometria proiettiva. La questione coincide allora con l'altra: a quale condizione il gruppo delle trasformazioni lineari può essere distinto dalla totalità delle trasformazioni per punti? Caratteristica delle prime è che a ogni piano corrisponda un piano: esse sono quelle trasformazioni per punti per le quali la varietà dei piani (o, il che è lo stesso, delle rette) è invariante. *La geometria proiettiva si ottiene dalla geometria di tutte le trasformazioni per punti aggiungendo la varietà dei piani, così come la geometria elementare si ottiene dalla proiettiva aggiungendo il cerchio immaginario all'infinito*. In particolare, dal punto di vista di tutte le trasformazioni per punti, definire una superficie come algebrica di un certo ordine significa stabilire una relazione invariante rispetto alla varietà dei piani. Il che diviene completamente chiaro, riconducendo alla Grassmann la generazione delle forme algebriche alla loro costruzione lineare.

§ 9. *Il gruppo delle trasformazioni per contatto*

In verità, le trasformazioni per contatto sono state da tempo trattate in casi particolari. Lo stesso Jacobi ha usato le più generali in ricerche analitiche. Esse, tuttavia, sono state introdotte nella concezione geometrica corrente solo dai recenti lavori di Lie.[45] Non è dunque del tutto superfluo spiegare chiaramente cosa sia una

[45] Cfr. In particolare il lavoro già citato: *Über partielle Differentialgleichungen und Komplexe*, «Math. Annalen», V. I particolari relativi alle equazioni alle derivate parziali

trasformazione per contatto, pur limitandosi, come al solito, allo spazio di punti a tre dimensioni.

Analiticamente parlando, una trasformazione per contatto è una sostituzione in cui le variabili x, y, z e le loro derivate parziali $dz/dx = p$, $dz/dy = q$ sono espresse in funzione di x', y', z', p', q'. È in generale evidente queste trasformazioni trasformano superfici tangenti in superfici tangenti. Da qui il nome di *trasformazioni per contatto*. Partendo dal punto come elemento dello spazio, le trasformazioni per contatto si dividono in tre classi. Quelle che alla varietà triplamente infinita di punti associano ancora punti (queste sono le trasformazioni per punti di cui ho appena parlato); quelle che trasformano punti in curve e infine quelle che trasformano i punti in superfici. Una tale suddivisione non va considerata come essenziale perché, se ci si serve di altri elementi dello spazio triplamente infiniti, per esempio i piani, si presenta di nuovo una suddivisione in tre gruppi, che non coincide con la suddivisione ottenuta partendo dai punti.

Applicando a un punto tutte le trasformazioni per contatto, otteniamo la totalità dei punti, delle curve e delle superfici. La totalità dei punti, delle curve e delle superfici formano un *corpo* del nostro gruppo. Da ciò si può trarre la regola generale che, per trattare formalmente un problema (per esempio di teoria delle equazioni alle derivate parziali, che tratterò più avanti) nel senso delle trasformazioni per contatto, non basta operare con coordinate di punto o di piano, perché gli elementi spaziali di base non formano un corpo. Non è però praticabile, volendo attenersi ai metodi ordinari, introdurre come elementi dello spazio tutti gli elementi contenuti nel corpo in questione, perché il loro numero è infinitamente infinito. Da ciò la necessità d'introdurre come elemento dello spazio, non il punto, né la curva o la superficie ma l'*elemento di superficie*, cioè il sistema di valori x, y, z, p, q come *elemento dello spazio*. Attraverso ciascuna trasformazione per contatto da ogni elemento di superficie se ne ottiene uno nuovo; gli elementi di superficie, cinque volte infiniti, formano allora un corpo.

Da questo punto di vista, bisogna concepire il punto, la curva, la superficie ciascuno come un aggregato di elementi di superficie, e in particolare come un aggregato doppiamente infinito. Infatti, una superficie è ricoperta da una molteplicità doppiamente infinita di elementi, in egual numero sono le tangenti a una curva, che è anche il numero di tangenti che passano per un punto, e un uguale numero di elementi può passare per un punto. Ma questi aggregati di elementi doppiamente infiniti hanno ancora una proprietà caratteristica comune. Chiamo *associati per posizione* due elementi consecutivi di superficie x, y, z, p, q e $x + dx, y + dy, z + dz, p + dp, q + dq$, quando sia

$$dz - pdx - qdy = 0.$$

Allora, il punto, la curva e la superficie sono tutti e tre *varietà doppiamente infinite di elementi, ciascuno dei quali è associato per posizione con quelli che, in numero semplicemente infinito, gli sono vicini*. Di conseguenza, punto, curva e superficie sono caratterizzati nello stesso modo e devono anche essere rappresentati analiticamente allo stesso modo, volendo assumere come fondamentale il gruppo delle trasformazioni per contatto.

L'associazione per posizione di due elementi consecutivi è una relazione invariante rispetto a qualsiasi trasformazione per contatto. Ma, reciprocamente, possiamo definire le trasformazioni per contatto come le sostituzioni di cinque variabili x, y, z, p, q, per le quali la relazione $dz - pdx - qdy = 0$ venga trasformata in se stessa. In queste ricerche, lo spazio deve essere quindi considerato come una varietà a cinque dimensioni. Bisogna

provengono da comunicazioni personali di Lie. Cfr. la sua Nota: *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen*, "Göttinger Nachrichten", Ott. 1872.

allora studiare questa varietà, prendendo come gruppo fondamentale la totalità delle trasformazioni delle variabili che lasciano invariata una certa relazione differenziale.

Oggetto primario della ricerca sono le varietà presentate attraverso una o più equazioni fra le variabili, cioè *le equazioni alle derivate parziali di primo ordine e i loro sistemi*. La questione capitale è di stabilire come dalle varietà di elementi, che soddisfano certe equazioni si possano ottenere serie semplicemente o doppiamente infinite, tali che ogni singolo elemento sia associato per posizione ai vicini. A una questione di questo tipo si riconduce per esempio il problema della risoluzione di un'equazione alle derivate parziali di primo ordine. La si può formulare in questo modo: dedurre dalla molteplicità quattro volte infinita di elementi, che soddisfano l'equazione, tutte le varietà doppiamente infinite di tipo noto. In particolare, il problema della soluzione completa assume ora la forma precisa: scomporre in un certo modo la varietà quattro volte infinita di elementi, che soddisfano l'equazione, in varietà doppiamente infinite di tipo dato.

Non intendo approfondire lo studio delle equazioni alle derivate parziali. Per questo, rinvio ai citati lavori di Lie. Osservo solo che, dal punto di vista delle trasformazioni per contatto, un'equazione differenziale alle derivate parziali di primo ordine non ha invarianti. Ciascuna di esse può essere trasformata in ogni altra e quindi le equazioni lineari non si distinguono ulteriormente [le une] dalle altre. Le differenze si presentano solo quando si torna al punto di vista delle trasformazioni per punti.

I gruppi di trasformazioni per contatto, di trasformazioni per punti e infine di trasformazioni proiettive sono caratterizzabili in uno stesso modo, che non posso passare sotto silenzio.[46] Ho già definito le trasformazioni per contatto come quelle che conservano l'associazione per posizione di elementi consecutivi di superficie. Le trasformazioni per punti hanno, al contrario, la proprietà caratteristica di trasformare elementi di linea consecutivi associati per posizione in elementi dello stesso tipo; infine le trasformazioni lineari e per dualità conservano l'associazione per posizione di elementi connessi consecutivi. Per elemento connesso, intendo l'unione di un elemento di superficie e di un elemento di linea contenuto in esso; elementi connessi consecutivi si dicono associati per posizione, quando non solo il punto ma anche l'elemento di linea dell'uno è contenuto nell'elemento di superficie dell'altro. La denominazione (del resto provvisoria) di *elemento connesso* si riferisce alle forme recentemente introdotte in geometria da Clebsch. Queste forme si rappresentano con un'equazione che contiene insieme una serie di coordinate di punti, di piani e di linee, i cui analoghi nel piano sono stati chiamati da Clebsch connessi.[47]

§ 10. *Sulle varietà a numero arbitrario di dimensioni*

Ho più volte fatto notare in precedenza che, discutendo delle rappresentazione di spazio, ho assecondato il desiderio di facilitare la comprensione di concetti astratti appoggiandomi a esempi intuitivi. In sé e per, queste considerazioni non dipendono dalla loro rappresentazione e appartengono al dominio generale delle ricerche matematiche note come teoria delle varietà pluriestese o più brevemente (secondo Grassmann) teoria dell'estensione. Il modo in cui bisogna procedere per ricondurre quanto abbiamo detto dello spazio alla pura nozione di varietà è facile da intendere. Osservo solo, ancora una volta, che nella ricerca astratta, rispetto alla geometria,

---

[46] Devo le seguenti definizioni a Lie.
[47] *Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie*, "Gött. Abhandlungen", vol. 17, 1872; come pure *Über ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene*, "Gött. Nachrichten", nr. 22, 1872.

abbiamo il vantaggio di poter scegliere in modo completamente arbitrario il gruppo di trasformazioni che vogliamo assumere come fondamentale, mentre in geometria un gruppo assai ristretto, il gruppo principale, è dato a priori.

Ora posso solo accennare, e per di più brevemente, ai seguenti tre modalità di trattamento.

10.1 *Modalità di trattamento proiettivo o algebra moderna* (*teoria degli invarianti*)

Il suo gruppo consiste di tutte le trasformazioni lineari e per dualità delle variabili usate per rappresentare gli elementi della varietà. È la generalizzazione della geometria proiettiva. Ho già fatto osservare che questa modalità è usata nella discussione sull'infinitamente piccolo di una varietà con una dimensione in più [cinque invece di quattro]. Essa comprende le modalità successive nel senso che il suo gruppo comprende i gruppi da porre a base di quelle.

10.2 *Varietà a curvatura costante*

In Riemann la rappresentazione di tale varietà risulta da quella più generale di varietà in cui è data un'espressione differenziale delle variabili. Per Riemann il gruppo consiste nella totalità delle trasformazioni delle variabili che lasciano invariata l'espressione differenziale data. Al concetto di varietà a curvatura costante si giunge in un altro modo, istituendo in geometria proiettiva una metrica sulla base di un'equazione di secondo grado tra le variabili. Questo metodo, diversamente da quello di Riemann, introduce la generalizzazione a variabili complesse. In un secondo tempo si può restringere la variabilità al dominio reale. A questo tipo appartengono le ricerche discusse nei paragrafi 5, 6, 7.

10.3 *La varietà piatta*

Per varietà piatta Riemann intende la varietà a curvatura costante nulla. La sua teoria è l'immediata generalizzazione della geometria elementare. Il suo gruppo può, come il gruppo principale della geometria, essere separato dal gruppo proiettivo tenendo fissa una forma rappresentata da due equazioni, una lineare e una di secondo grado. Si deve distinguere tra reale e immaginario, se ci si vuole attenere alla forma in cui la teoria viene solitamente esposta. Anche in questa teoria la geometria elementare figura al primo posto. Vengono poi le generalizzazioni dell'ordinaria teoria della curvatura, ecc., sviluppate ultimamente.

Osservazioni finali

Per finire devono trovare posto ancora due osservazioni, strettamente collegate a quanto precede. Una riguarda il formalismo con cui si debbono rappresentare gli sviluppi concettuali di cui sopra; l'altra serve a evidenziare alcuni problemi che, in rapporto alle spiegazioni date, appare importante e vantaggioso affrontare nella prospettiva qui delineata.

Spesso si è rimproverato alla geometria analitica di favorire, con l'introduzione di sistemi di coordinate, alcuni elementi arbitrari. Il rimprovero riguarda ugualmente tutte le trattazioni di varietà pluriestese, che caratterizzano il singolo elemento mediante il valore delle variabili. Seppure il rimprovero era spesso giustificato dal modo difettoso con cui, soprattutto all'inizio, si usava il metodo delle coordinate, esso viene meno con una trattazione razionale del metodo. Le espressioni analitiche, che possono presentarsi nello studio di una varietà in relazione a un certo gruppo, devono essere, per ciò che riguarda il loro significato, indipendenti dal sistema di coordinate, poiché quest'ultimo è scelto arbitrariamente e si tratta quindi di porre in evidenza anche *formalmente* questa indipendenza. Che ciò sia possibile e come ciò possa accadere lo mostra l'algebra moderna, nella quale il concetto formale di invariante, qui trattato, è espresso nel modo più chiaro. L'algebra moderna possiede una legge generale e completa per formare le espressioni invarianti e opera principalmente solo con esse. La stessa richiesta va rivolta alla trattazione formale quando i gruppi fondamentali siano diversi dal proiettivo.[48] In effetti, il formalismo deve coincidere con la costruzione dei concetti, sia che lo si utilizzi per esprimerli in modo chiaro e distinto, sia che lo si usi per penetrare facilmente in campi non ancora esplorati.

La problematica, che voglio ancora citare, nasce dal confronto con le intuizioni di Galois nella cosiddetta teoria delle equazioni. Nella teoria di Galois, come qui, l'interesse si concentra sui *gruppi* di trasformazioni. Gli oggetti, ai quali si riferiscono le trasformazioni, sono tuttavia differenti. Nella teoria di Galois, si ha a che fare con un numero finito di elementi discreti; qui invece con il numero infinito degli elementi di un continuo. Ma, grazie all'identità della nozione di gruppo, il confronto si può ulteriormente sviluppare;[49] ed è il caso di parlarne, dato che caratterizza la mia posizione e di Lie[50] nelle ricerche condotte in base alle considerazioni qui esposte.

Nella teoria di Galois, così come esposta per esempio nel *Traité d'Algèbre supérieure* di Serret o nel *Traité des substitutions* di C. Jordan, l'oggetto vero e proprio di ricerca è la stessa teoria dei gruppi o teoria delle sostituzioni. La teoria delle equazioni è l'applicazione conseguente. Corrispondentemente richiediamo una *teoria delle trasformazioni*, cioè una teoria dei gruppi prodotti da trasformazioni di un certo tipo. I concetti di permutabilità, similitudine, ecc. potranno essere impiegati come nella teoria delle sostituzioni. La trattazione corrente delle varietà, che mette a fondamento i gruppi di trasformazioni, è un'applicazione della teoria delle trasformazioni.

In teoria delle equazioni interessano soprattutto le funzioni simmetriche dei coefficienti e, subito dopo, quelle espressioni che non variano quando si scambiano, se non tutte, almeno gran parte delle radici. Analogamente, ponendo a fondamento di una varietà il suo gruppo, cerchiamo prima di tutto i corpi (§ 5) e poi le forme che non variano in ogni trasformazione del gruppo. Ma ci sono forme che non ammettono tutte ma solo alcune trasformazioni del gruppo, e queste sono particolarmente interessanti per

[48] [Nota del 1893. Per esempio i quaternioni forniscono un formalismo di questo tipo per il gruppo delle rotazioni dello spazio tridimensionale intorno a un punto fisso. [Nota del 1921] Tuttavia, ho seguito molto poco le esigenze esposte nel testo. Determinante è stata per me l'esperienza personale, in particolare quella dell'insegnamento, grazie alla quale ho capito che l'apprendimento di nuovi tipi di scritture simboliche richiede, in generale, molto più tempo se non se ne mostra l'applicazione. A questo sembra essere collegato il fatto che sempre meno matematici apprendono il tipo di simbolismo proposto dai loro colleghi (mentre al contrario moltissimi matematici trovano comodo rappresentare i propri pensieri con simboli nuovi che essi stessi creano.) A causa di questo comportamento oggigiorno abbiamo nella matematica un linguaggio molto confuso: la cosa preoccupa comunque, anche se non sembra che possa fermare il progresso della matematica.]

[49] Ricordo che già nell'introduzione alla I edizione della *Teoria dell'estensione* (1844) Grassmann stabilì un parallelismo tra analisi combinatoria e teoria dell'estensione.

[50] Cfr. il lavoro comune: *Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen*, "Math. Annalen", vol. 4.

la trattazione fondata sul gruppo, perché hanno proprietà particolari. I risultati da segnalare sono corpi simmetrici o regolari, nel senso della geometria usuale, superfici di rotazione o elicoidali. Dal punto di vista della geometria proiettiva e richiedendo in particolare che le trasformazioni, che trasformano le forme in se stesse, permutino, si giunge sia alle forme considerate da Lie e da me nel lavoro citato, sia al problema generale posto nel § 6 di quello. La determinazione di tutti i gruppi di infinite trasformazioni lineari permutabili nel piano, presentata da me e da Lie nei §§ 1 e 3, è parte della teoria generale delle trasformazioni di cui ho già parlato.[51]

Note

I. *La contrapposizione tra indirizzo sintetico e analitico nella geometria moderna*

La differenza tra nuova sintesi e nuova geometria analitica oggi non è più da considerare essenziale, perché contenuti di pensiero e modi di deduzione hanno finito per coincidere quasi del tutto da entrambe le parti. Per designarle entrambe, nel testo parlo solo di "geometria proiettiva". Infatti, seppure l'indirizzo sintetico lavora di più con l'intuizione spaziale e i suoi semplici sviluppi hanno un fascino non comune, il dominio dell'intuizione spaziale non è precluso al metodo analitico, potendosi le formule della geometria analitica concepire come espressioni chiare e precise di relazioni geometriche. D'altra parte, per lo sviluppo della ricerca non va sottovalutato il vantaggio, che un formalismo adeguato rappresenta per lo sviluppo della ricerca, di precedere addirittura il pensiero. La prescrizione è sempre la stessa: un oggetto matematico va considerato esaurito solo quando diventa concettualmente evidente. Avanzare sulla scorta del formalismo è solo un primo ma importantissimo passo.

II. *Divisione dell'attuale geometria in discipline*

Considerato, per esempio, che il fisico matematico rifiuta di norma i vantaggi provenienti in parecchi casi da un'intuizione proiettiva relativamente formata e che, d'altro lato, il geometra proiettivo non mette mano alla ricca fonte di verità matematiche, scoperta dalla teoria della curvatura delle superfici, si è costretti a considerare lo stato attuale del sapere geometrico sicuramente imperfetto e sperabilmente transitorio.

[51] Devo rinunciare a mostrare l'utilità delle trasformazioni infinitesime per la teoria delle equazioni differenziali. Nel § 7 del lavoro citato, Lie e io abbiamo dimostrato che: equazioni differenziali ordinarie che ammettono uguali trasformazioni infinitesime presentano identiche difficoltà di integrazione. In diversi lavori (cfr. "Math. Annalen", vol. 5, cit.) e con diversi esempi (cfr. in particolare i "Rendiconti dell'Accademia di Cristiania", 3 maggio 1872) Lie ha esposto come si possano usare queste argomentazioni per le equazioni alle derivate parziali. [Nota del 1893. Oggi posso dire che i due problemi menzionati hanno continuato a orientare i successivi lavori miei e di Lie. Per quanto riguarda Lie, devo citare innanzitutto la sua *Teoria dei gruppi continui di trasformazione*, esposta sistematicamente in due volumi (Leipzig, vol. I 1888, vol. II 1890). Tra le mie ricerche posteriori a questo scritto menziono quelle sui corpi regolari, sulle funzioni modulari ellittiche e, in generale, sulle funzioni uniformi che ammettono trasformazioni lineari. Ho esposto le prime inel 1884 in un'opera speciale: *Lezioni sull'icosaedro e sulle soluzioni delle equazioni di quinto grado* (Leipzig, Teubner, 1883). Poco dopo è uscito il primo volume (in collaborazione con Fricke) sulla *Teoria delle funzioni modulari ellittiche* (Leipzig, Teubner, 1890).]

III. *Il valore dell'intuizione spaziale*

Quando nel testo indico l'intuizione spaziale come qualcosa di accidentale, lo intendo in riferimento al contenuto puramente matematico delle considerazioni in via di formulazione. Per le quali l'intuizione vale solo come un modo per rendere le cose rappresentabili, un valore che, del resto, per l'insegnamento va tenuto nella massima considerazione. Un modello geometrico è in questo senso molto istruttivo e interessante.

Diverso è invece il problema del valore dell'intuizione spaziale in generale. Io la considero un'entità autonoma. Esiste una geometria vera e propria, come quella delle ricerche di cui parlo, che non può essere solo la forma sensibile di considerazioni astratte. In geometria si considerano le figure spaziali nella loro piena realtà di *Gestalt* e (ciò costituisce il lato matematico della questione) le relazioni che soddisfano si intendono come conseguenze evidenti dei fondamenti dell'intuizione spaziale. Per questa geometria, un modello – costruito, esaminato o solo sensibilmente rappresentato – non è un mezzo per conseguire un fine ma è la cosa stessa.

Nel collocare la geometria accanto alla matematica pura ma indipendente da essa, come qualcosa di autonomo, non c'è nulla di nuovo. È tuttavia opportuno ribadire esplicitamente il punto di vista, dato che le ricerche recenti l'hanno quasi del tutto trascurato. Al contrario, raramente sono stati applicati i nuovi metodi d'indagine là dove si tratta di dominare i rapporti di forma (*Gestalt*) degli enti spaziali, anche se in questo senso sembrano particolarmente fecondi.

IV. *Le varietà a un numero qualsiasi di dimensioni*

Dal punto di vista matematico è indiscutibile che lo spazio, concepito come luogo di punti, abbia solo tre dimensioni. Ma dallo stesso punto di vista non è inconcepibile andare oltre e affermare, per es., che ne abbia quattro o un numero illimitato, anche se noi ne possiamo percepire solo tre. La teoria delle varietà pluriestese, così come va sempre più sviluppandosi nelle ricerche matematiche moderne, è per sua natura del tutto indipendente da tale affermazione. Ha preso piede un modo di esprimersi che deriva da questa idea. Invece di parlare di elementi di una varietà, si parla dei punti di uno spazio superiore, ecc. Di per sé questo modo di esprimersi ha qualcosa di buono, in quanto facilita la comprensione, rifacendosi all'intuizione geometrica. Ma ha avuto la conseguenza infausta che le ricerche sulle varietà pluridimensionali sono considerate in molti ambienti come qualcosa di intimamente legato alle citate rappresentazioni sulla natura dello spazio. Niente di meno fondato. Se questa rappresentazione fosse esatta, senza dubbio le suddette ricerche matematiche troverebbero immediata applicazione geometrica, ma sia il valore, sia l'intenzione di queste ricerche, affatto indipendenti entrambi da questa rappresentazione, poggia unicamente sul loro contenuto matematico.

Come ha insegnato Plücker, tutt'altra cosa è il modo di concepire lo spazio reale come varietà a numero arbitrariamente alto di dimensioni, introducendo (cfr. § 5) come elemento dello spazio una forma (curva, superficie, ecc.) dipendente da un numero qualsiasi di parametri.

Il modo di rappresentare l'elemento di una varietà a numero qualsiasi di dimensioni come analogo del punto dello spazio è stato sviluppato per primo da Grassmann nella sua *Teoria dell'estensione* (1844). Il pensiero di Grassmann è scevro dalle citate rappresentazioni della natura dello spazio. Queste ultime risalgono a osservazioni occasionali di Gauss e si sono diffuse grazie alle ricerche di Riemann sulle varietà pluriestese, con le quali si intrecciano.

Entrambi i modi di vedere – quello di Grassmann, e quello di Plücker – hanno i propri specifici vantaggi e ci si può servire di entrambi, alternativamente, con profitto.[52]

V. *La cosiddetta geometria non euclidea*

Come hanno mostrato recenti ricerche, quella che nel testo ho chiamato geometria metrica proiettiva, coincide sostanzialmente con la geometria metrica pensabile senza assumere l'assioma delle parallele, la quale con il nome di geometria non euclidea è attualmente oggetto di frequenti dibattiti e discussioni. Nel testo non ho mai usato questa locuzione per un motivo riconducibile alle considerazioni espresse nella precedente nota. Al nome di geometria non euclidea viene riferite una quantità di idee che non hanno nulla di matematico e sono accettate da alcuni con un entusiasmo pari alla repulsione che provocano in altri. In ogni caso, le mie considerazioni puramente matematiche non hanno nulla a che vedere con queste idee. Il desiderio di chiarire in questo senso i concetti motiva le seguenti considerazioni.

Le ricerche sulla teoria delle parallele e loro successivi sviluppi hanno una doppia importanza matematica.

In primo luogo, dimostrano – e la questione va considerata definitivamente chiusa – che l'assioma delle parallele non consegue matematicamente dagli assiomi che solitamente lo precedono, ma esprime un fatto intuitivo essenzialmente nuovo, che le ricerche precedenti non toccano. Analisi di questo tipo si potrebbero e si dovrebbero effettuare relativamente a ogni assioma, anche al di fuori della geometria. Si guadagnerebbe la comprensione della posizione reciproca degli assiomi.

In secondo luogo, queste ricerche ci hanno regalato una nozione matematica preziosa: il concetto di varietà a curvatura costante. Come ho già dimostrato e poi ampiamente sviluppato nel § 10 del testo, il concetto è intimamente collegato con la determinazione metrica proiettiva, costruita indipendentemente da ogni teoria delle parallele. Lo studio di questa metrica è già di per sé di grande interesse matematico e permette numerose applicazioni. Inoltre, comprende come caso speciale (limite) la determinazione della metrica data in geometria, che insegna a considerare da un punto di vista superiore.

Del tutto indipendente da queste considerazioni è la questione dei fondamenti su cui poggia l'assioma delle parallele, se dobbiamo considerarlo come dato assoluto – come vogliono gli uni – o solo come provato approssimativamente dall'esperienza – come dicono gli altri. Se vi fossero ragioni per accettare un tale modo di vedere, le ricerche matematiche mostrerebbero come costruire una geometria perfetta. Ma questa è evidentemente una questione filosofica. che riguarda i principi più generali della nostra conoscenza. In quanto tale il matematico non si interessa di simili problemi e desidera che le sue ricerche siano considerate come indipendenti da come l'una o l'altra parte possano rispondere alla domanda.

VI. *La geometria delle linee come studio di una varietà a curvatura costante*

Mettendo in relazione la geometria delle linee con la metrica proiettiva in una varietà a cinque dimensioni, dobbiamo fare attenzione al fatto che le linee rette ci presentano (nel senso della metrica) soltanto gli elementi all'infinito della varietà. Diventa così

[52] [Nota del 1921. È inutile osservare quali sviluppi abbia avuto il concetto di pluridimensionalità negli ultimi decenni. Per quanto concerne la concezione di Grassman e la sua trattazione delle forme algebriche rimando al lavoro di Segre nel III volume, fascicolo 7 della *Math. Enzyklopädie*].

necessario esaminare quali valori assuma una metrica proiettiva per i suoi elementi all'infinito. Se ne può dire qualcosa in questa sede per eliminare le difficoltà che impediscono di concepire la geometria delle linee come geometria metrica. Riferisco queste spiegazioni all'esempio intuitivo della metrica proiettiva basata su di una superficie di secondo grado.

Due punti arbitrari dello spazio hanno, rispetto alla superficie, un invariante assoluto: il birapporto tra loro e i due punti dove la retta che li congiunge intersezione la superficie. Ma se i due punti vengono a trovarsi sulla superficie, il birapporto si annulla, indipendentemente dalla posizione dei punti, fatta eccezione per il caso in cui i due punti vengano a trovarsi su una generatrice, nel qual caso il birapporto resta indeterminato: è il solo caso particolare, al quale la loro posizione relativa dà luogo, quando essi non coincidono. Abbiamo allora il teorema:

La metrica proiettiva, che si può fondare nello spazio su di una superficie di secondo grado, non fornisce alcuna metrica per la geometria su questa superficie.

A ciò si collega il fatto che, mediante trasformazioni lineari della superficie in se stessa, si possono far coincidere tre qualsiasi punti della superficie con tre altri.[53]

Per avere una metrica sulla superficie stessa bisogna restringere il gruppo delle trasformazioni. Ciò si ottiene tenendo fisso un punto qualunque dello spazio (o il suo piano polare). Supponiamo inizialmente che questo punto dello spazio non appartenga alla superficie. Si proietti quindi la superficie dal punto su di un piano; in questo modo compare una conica come curva di intersezione. Prendiamo questa conica come base nel piano per una metrica proiettiva, e riportiamo poi questa metrica sulla superficie (cfr. paragrafo 5). Questa è una vera e propria metrica a curvatura costante e si ha allora il teorema:

Si ottiene sulla superficie una metrica a curvatura costante, tenendo fisso un punto esterno alla superficie.

Analogamente si trova (cfr. § 4):

Si ottiene sulla superficie una metrica a curvatura nulla, scegliendo come punto fisso un punto della superficie.

Per tutte queste metriche sulla superficie le generatrici sono linee di lunghezza nulla. L'espressione dell'elemento d'arco sulla superficie differisce allora nelle diverse metriche solo per un fattore costante. Non vi è sulla superficie un elemento d'arco assoluto. Ma si può sicuramente parlare dell'angolo che due direzioni formano sulla superficie.

Tutti questi teoremi e queste considerazioni si possono senz'altro applicare alla geometria delle linee. Anche per lo spazio delle linee non esiste a priori una vera e propria metrica. Se ne ottiene una fissando un complesso di linee. In questo caso la metrica ha una curvatura costante o nulla a seconda che il complesso sia generale o particolare (una retta). Anche l'esistenza di un elemento d'arco assoluto è legata alla

---

[53] [Nota del 1921. Questi rapporti risultano alterati nella geometria metrica usuale; due punti all'infinito hanno certamente un invariante assoluto. La contraddizione, che si può incontrare numerando le trasformazioni lineari che riproducono la superficie all'infinito, si elimina osservando che le traslazioni e le trasformazioni per similitudine, comprese in quelle trasformazioni, non alterano affatto i punti all'infinito.]

scelta del complesso. Qualunque sia la scelta, la distanza di due rette infinitamente vicine, che si tagliano, è nulla; e si può anche parlare dell'angolo che formano due rette infinitamente vicine a una retta data.[54]

VII. *L'interpretazione delle forme binarie*

Dimostrerò ora come si possa fornire una rappresentazioni semplice di quei sistemi che possono essere ricondotti alla for ma binaria cubica e alla forma binaria biquadratica, per mezz dell'interpretazione di $x + iy$ sulla sfera.

Una forma binaria cubica f ha un covariante cubico Q, uno quadratico Δ e un invariante R.[55] Da f e Q si ricava tutta un serie di covarianti di sesto grado

$$Q^2 + \lambda Rf^2$$

fra i quali figura Δ^3. Si può dimostrare[56] che ogni covariante della forma cubica si scompone in certi sistemi di sei punti; dato che λ può assumere valori complessi, ne esiste un quantità doppiamente infinita.

Tutto il sistema di forme così definito può essere rappresentato sulla sfera nel seguente modo:[57] con un'opportuna trasformazione lineare della sfera in se stessa si portino i tre punti, rappresentati da!, in tre punti equidistanti su di una circonferenza massima. Quest'ultima la possiamo chiamare equatore; su quest'ultimo, i tre punti f hanno rispettivamente longitudine geografica 0°, 120°, 240°. Q sarà allora rappresentato dai punti dell'equatore di longitudine 60°, 180°, 300°, Δ dai due poli. Ogni forma $Q^2 + \lambda Rf^2$ è rappresentata da sei punti, di latitudine e longitudine contenute nella seguente tabella, nella quale α e β indicano numeri qualsiasi:

$$\begin{array}{cccccc} \alpha, & \alpha, & \alpha, & -\alpha, & -\alpha, & -\alpha, \\ \beta, & 120+\beta, & 240+\beta, & -\beta, & 120-\beta, & 240-\beta. \end{array}$$

Esaminando le successioni di questi sistemi di punti sulla sfera, è interessante osservare che f e Q vengano contati due volte e Δ tre.

Una forma biquadratica f ha un covariante H anch'esso biquadratico, un covariante di sesto grado T, due invarianti i e j. Particolarmente notevole è la serie di forme biquadratiche $iH + \lambda jf$, che corrisponde a T; a questa serie appartengono i tre fattori di secondo grado in cui si può scompone T, dato che ciascuno di essi viene contato due volte.

Facciamo ora passare, per il centro della sfera, tre assi ortogonali tra loro OX, OY, OZ. I loro sei punti d'intersezione con la sfera costituiscono la forma T. Designando con x, y, z le coordinate di un qualsiasi punto della sfera, i quattro punti di una quadrupla $iH + \lambda jf$ sono rappresentati dallo schema seguente

$$\begin{array}{c} x, y, z, \\ x, -y, -z, \\ -x, y, -z, \\ -x, -y, z. \end{array}$$

[54] Cfr. *Über Liniengeometrie und metrische Geometrie*, "Math. Annalen", vol. 5.
[55] Cfr. i relativi capitoli di Clebsch *Teorie der binären Formen* (1871).
[56] Considerando le trasformazioni lineari di f in se stessa. Cfr. "Math. Annalen", vol. 4. p. 352.
[57] Si veda anche Beltrami, *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche*, Accademia di Bologna, *Memorie*, 1870.

Quattro punti formano sempre i vertici di un tetraedro simmetrico, e quelli che sono opposti sono divisi in due parti uguali dagli assi del sistema di coordinate, con ciò è messo in evidenza il ruolo di T nella teoria delle equazioni biquadratiche come risolvente di $iH + \lambda jf$.

Erlangen, Ottobre 1872.[58]

[58] [Nota del 1921. Alle indicazioni del testo si collegano come immediata attuazione i miei lavori sulla *Forme binarie con trasformazioni lineari in sé* (vedi in particolare "Math. Annalen", IX, 1875). Per il resto rimando ancora volentieri, mentre concludo questa ristampa del Programma di Erlangen, ai lavori di Moebius (che io stesso ho compreso nella loro interezza dopo che ho potuto collaborare negli anni 1885-1887 all'edizione generale delle opere presso la Società delle Scienze di Sassonia). Moebius non conosceva ancora il concetto generale di gruppo, né molte delle trasformazioni geometriche considerate nel Programma di Erlangen ma, spinto da un istinto sicuro, aveva orientato i suoi successivi lavori geometrici secondo l'idea di fondo del Programma. Già nel paragrafo centrale del *Calcolo baricentrico* (1827), Moebius classifica i "compiti geometrici" secondo la "parentela" delle "uguaglianze" (congruenze), "similitudini", "affinità" e "collineazioni". Dal 1853 inizia a parlare di "affinità circolari" (cioè di geometria dei raggi reciproci del piano). Già prima (1849), si era occupato di simmetria dei cristalli. Nel 1863, all'età di 73 anni, tratta le affinità "elementari" (cioè quel campo della geometria oggi chiamato *Analysis situs*). Con queste precisazioni intendo dare risalto alle interessanti osservazioni che Kurt Reinhardt ha avanzato nei vv. II e IV delle *Opere di Moebius*, a proposito della nascita e del collegamento dei singoli lavori, servendosi del ricco contenuto dei manoscritti lasciati.]