

*Sulla legge di ripartizione dell'energia nello spettro normale*¹
di Max Planck (1858-1947)

Miei Signori!

Quando parecchie settimane fa ebbi l'onore di richiamare la Loro attenzione su una nuova formula, che mi sembrava adatta a esprimere la legge di ripartizione dell'energia radiante in tutti i domini dello spettro normale, la mia opinione sull'utilità della formula, come già allora esposi, si fondava non solo sulla concordanza apparentemente buona dei pochi numeri, che allora potevo comunicarvi, con i precedenti risultati di misura, ma principalmente sulla semplice costruzione della formula e in particolare sul fatto che la medesima fornisce un'espressione logaritmica assai semplice per la dipendenza dell'entropia di un risonatore irradiato, vibrante in modo monocromatico, della sua energia di vibrazione.² Questa formula sembra promettere la possibilità di un significato generale in ogni caso meglio di ogni altra formula finora proposta, prescindendo da quella di Wien, la quale però non è confermata dai fatti.³

Entropia comporta disordine, e questo disordine credevo poterlo scorgere nella mancanza di regolarità con cui anche in un campo di radiazione perfettamente stazionario le oscillazioni del risonatore cambiano le loro ampiezze e le loro fasi, finché si considerano intervalli temporali che siano grandi rispetto al tempo di un'oscillazione, ma piccoli rispetto al tempo di una misura. Di conseguenza l'energia costante del risonatore oscillante in modo stazionario va presa solo come valore medio nel tempo, o, ciò che è lo stesso, come valore medio istantaneo delle energie di un gran numero di risonatori identici che si trovino nello stesso campo di radiazione stazionario abbastanza distanti tra loro, sì da non influenzarsi reciprocamente in modo diretto. Poiché in questo modo l'entropia di un risonatore è condizionata dal modo di ripartizione istantanea dell'energia fra molti risonatori, così io supposi che questa grandezza si sarebbe dovuta poter calcolare nella teoria elettromagnetica della radiazione con l'introduzione delle considerazioni probabilistiche, la cui importanza per il secondo principio della termodinamica è stata scoperta per primo da L. Boltzmann. Questa supposizione è stata confermata. Mi è stato possibile scoprire in maniera deduttiva un'espressione per l'entropia di un risonatore oscillante monocromaticamente, e con ciò la ripartizione dell'energia in uno stato radiante stazionario, cioè nello spettro normale, dove è necessario solo dare forma più ampia di quella data finora all'ipotesi di "radiazione naturale", da me introdotta nella teoria elettromagnetica. Oltre a ciò sono però risultate qui anche altre relazioni, che mi sembrano di portata rilevante per più ampi campi della fisica e della chimica.

¹ Il testo qui riportato fu pubblicato in "Verhandlungen der Deutschen Physical Gesellschaft", 2, 237, 1900. Esso concerne l'esposizione delle idee generali e del metodo. Il lavoro completo di calcoli fu pubblicato alcuni mesi dopo in "Annalen der Physik", 4, 553, 1901. La traduzione italiana qui riportata segue quasi integralmente quella pubblicata in Max Planck, *Scienza, filosofia e religione*, a cura di F. Selvaggi, Fratelli Fabbri, Milano, 1965. Quest'opera, che contiene vari scritti di Planck e un ampio saggio del curatore, è consigliata a chi voglia approfondire la conoscenza della personalità di Planck, caratterizzata dell'interesse non solo ai problemi strettamente della fisica, ma a valori umanistici in generale.

² Planck intende qui l'energia di un sistema di cariche oscillanti elasticamente interagenti con il campo della radiazione elettromagnetica, dentro la cavità che costituisce il corpo nero.

³ Planck non allude qui alla legge di Wien ma a una formula concernente la distribuzione spettrale della radiazione del corpo nero.

A me oggi importa non tanto sviluppare qui sistematicamente in tutti i particolari quella deduzione, che si appoggia sulle leggi della radiazione elettromagnetica, della termodinamica e del calcolo di probabilità, quanto piuttosto esporvi nel modo più chiaro possibile il vero punto centrale di tutta la teoria. Ciò può avvenire nel modo migliore descrivendovi qui un nuovo procedimento del tutto elementare con il quale, pur senza sapere alcunché di formule spettrali o di qualsiasi altra teoria, è possibile calcolare numericamente la ripartizione di una data quantità di energia nei singoli colori⁴ dello spettro normale con l'aiuto di un'unica costante naturale e poi, con l'aiuto di una seconda costante, anche la temperatura dell'energia radiante. Nel procedimento che esporrò Loro sembrerà che ci sia qualcosa di arbitrario e complicato, ma, come ho detto, qui non valorizzo la prova della necessità e la facile attuabilità pratica, ma solo la chiarezza e l'univocità delle regole proposte per la soluzione del problema.

In un mezzo diatermico,⁵ racchiuso da pareti riflettenti con la velocità di propagazione della luce c , si trova un grande numero di oscillatori lineari oscillanti monocromaticamente a convenienti distanze, e precisamente N con il numero di oscillazioni ν (al secondo), N' con il numero di oscillazioni ν' , N'' con il numero di oscillazioni ν'' ecc., dove tutti gli N sono numeri grandi. Il sistema contiene una data quantità di energia: l'energia totale E_t in erg, che parte compare nel mezzo come radiazione propagantesi, parte nei risonatori come oscillazione degli stessi. Il problema è determinare come si distribuisce nello stato stazionario questa energia fra le oscillazioni degli oscillatori e i singoli colori della radiazione presente nel mezzo e quale temperatura poi possiede l'intero sistema.

Per rispondere a questa domanda, prendiamo dapprima in considerazione solo le oscillazioni dei risonatori, e per tentativi ripartiamo tra loro energie arbitrarie, cioè agli N risonatori ν attribuiamo l'energia E , agli N' risonatori ν' l'energia E' ecc. Naturalmente la somma

$$E + E' + E'' + \dots = E_0$$

deve essere minore di E_t . La differenza $E_t - E_0$ appartiene allora alla radiazione che si trova nel mezzo. Ora bisogna ancora effettuare la ripartizione dell'energia tra i singoli risonatori di ciascuna specie, in primo luogo la ripartizione dell'energia E fra gli N risonatori con il numero di oscillazioni ν . Se E viene considerata come una grandezza divisibile illimitatamente, allora la ripartizione è possibile in infiniti modi. Noi però – e questo è il punto essenziale di tutto il calcolo⁶ – consideriamo E come composto da

⁴ “nei singoli colori” va inteso “alle singole frequenze”.

⁵ La ragione per cui Planck nel corso di tutta la nota parla di “mezzo diatermico” entro la cavità è che a quel tempo non si pensava che il campo elettromagnetico potesse aver sede anche nel vuoto, ma si doveva ricorrere all'etere. Questo sarebbe stato demolito dopo cinque anni, con il lavoro di Einstein del 1905.

⁶ Questo è veramente il punto cruciale: esso va oltre la fisica classica. Secondo questa, infatti, si può variare con continuità l'energia di un oscillatore variando le condizioni iniziali del moto (spostamento e velocità) che sono arbitrarie. In verità, la discretizzazione dell'energia delle particelle era stata usata da Boltzmann (1872) nell'ambito del modello cinetico, ma come strumento puramente tecnico per calcolare il numero di modi con cui è realizzabile una configurazione in maniera del tutto simile a quanto fa Planck nel presente lavoro. Ma in Boltzmann la discretizzazione dell'energia non aveva alcun significato fondamentale, tanto è vero che non ne restava traccia nei risultati. Invece, in Planck essa ha un significato fisico, il cui aspetto quantitativo è espresso dalla costante h , che egli determinò dal confronto con i

un numero del tutto determinato di parti uguali finite e a tal fine ci serviamo della costante fisica $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$ erg.sec. Questa costante, moltiplicata per il numero di oscillazioni ν comune ai risonatori, dà l'elemento di energia ϵ in erg. Dividendo E per ϵ otteniamo il numero P degli elementi di energia da ripartire tra gli N risonatori. Quando il quoziente così calcolato non è un numero intero, si prende per P il numero intero vicino.

È chiaro che la ripartizione dei P elementi di energia agli N risonatori può effettuarsi solo in un numero finito e ben determinato di modi. Ognuno di questi modi lo chiamiamo una "compleSSIONE", con un termine già usato da Boltzmann per un'idea simile.⁷ Se si designano i risonatori con le cifre 1,2,3... fino a N , si scrivono questi in fila l'uno accanto all'altro e si pone sotto ogni risonatore il numero degli elementi di energia che gli toccano, si ottiene per ogni compleSSIONE un simbolo della forma seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7	38	11	0	9	2	20	4	4	5

Qui si è preso $N = 10$, $P = 100$. Il numero di tutte le compleSSIONI possibili è manifestamente uguale al numero di tutti i possibili quadri di cifre che in questa maniera si possono ottenere per la serie inferiore con un determinato N e P . Per evitare ogni malinteso si noti ancora che due compleSSIONI sono da considerare come distinte quando il corrispondente quadro di cifre contiene le stesse cifre, ma con ordinamento differente...

[In pratica si tratta di calcolare il numero di combinazioni con ripetizione di 100 elementi presi a 10 a 10, in questo caso oltre 42.634 miliardi. La Comunicazione prosegue deducendo con i metodi del calcolo combinatorio il numero di compleSSIONI corrispondenti a dati N e P . Poi riprende come segue.]

...Così ad ogni altra ripartizione di energia arbitrariamente supposta E, E', E'', \dots corrisponde un numero R di compleSSIONI possibili da determinare nel modo di cui sopra. Ora, fra tutte le ripartizioni di energia, possibili con un'energia costante

$$E_0 = E + E' + E'' + \dots$$

ce n'è una sola del tutto determinata, per la quale il numero delle compleSSIONI possibili R_0 è massimo. Ricerchiamo questa ripartizione di energia, eventualmente per tentativi, poiché sarà proprio quella che i risonatori assumono in un campo di radiazione stazionario, se essi possiedono complessivamente l'energia E_0 .⁸ Allora tutte le grandezze $E, E', E'' \dots$ possono essere espresse mediante la sola grandezza E_0 . Dividendo E per N, E' per N' ecc. si ottiene il valore stazionario dell'energia $U_\nu, U'_\nu,$

dati sperimentali, come dice più avanti nella *Comunicazione*. Planck ottenne così l'accordo con i risultati sperimentali sulla radiazione del corpo nero, ma fu ben consapevole di aver aperto un problema profondo: perché l'energia degli oscillatori deve essere quantizzata? È questo un aspetto del problema che impegnò i fisici per i primi tre decenni del Novecento e fu risolto dalla fisica quantistica.

⁷ Il significato della parola "compleSSIONE" qui usata è lo stesso del "numero di modi in cui si può realizzare una certa "configurazione", in questo caso una combinazione con ripetizione.

⁸ Il logaritmo di R_0 è, dunque, a parte un fattore, l'entropia del sistema degli oscillatori.

U_ν ... di ogni singolo risonatore di ciascuna specie⁹ e con ciò anche la densità nello spazio dell'energia radiante nel mezzo diatermico appartenente all'intervallo spettrale da ν fino a $\nu + d\nu$:¹⁰

$$u_\nu d\nu = 8\pi\nu^2 c^{-3} U_\nu d\nu$$

mediante cui è determinata l'energia contenuta nel mezzo.

Di tutte le grandezze introdotte solo E_0 appare ancora scelta arbitrariamente. Si vede però facilmente che anche E_0 va calcolata dall'energia totale data E_t . Poiché, se il valore scelto di E_0 dovesse dare un valore troppo grande di E_t , allora andrebbe diminuito corrispondentemente, e viceversa.

Una volta accertata la ripartizione stazionaria dell'energia con l'aiuto della costante h , si trova la temperatura corrispondente T mediante una seconda costante fisica¹¹ $k = 1,346 \cdot 10^{-16}$ erg.gradi⁻¹ mediante l'equazione:¹²

$$T^{-1} = k \cdot d \log R_0 / dE_0,$$

dove il prodotto $k \cdot \log R_0$ è l'entropia del sistema dei risonatori, somma delle entropie dei singoli risonatori.

Sarebbe ora veramente troppo complicato eseguire realmente i calcoli indicati, sebbene non sarebbe certo senza interesse provare almeno in un caso semplice il grado di raggiungibile *approssimazione alla verità*.¹³ In maniera molto più diretta un facile calcolo più generale, condotto precisamente in base alle norme date, mostra che la ripartizione normale dell'energia determinata in questa maniera viene rappresentata nel mezzo irradiato dall'espressione:

$$u_\nu d\nu = 8\pi\nu^2 c^{-3} (\exp(h\nu/kT) - 1)^{-1} d\nu.$$

I valori numerici indicati per h e k li ho calcolati da questa formula secondo le misure di F. Kurlbaum di O. Lummer e di E. Pringsheim...

[La Comunicazione *prosegue trattando vari riscontri di tipo chimico-fisico della formula trovata*].

Un commento

⁹ U_ν è l'energia recata dalla classe degli oscillatori di frequenza $h\nu$, divisa per il loro numero N . Essa risulta da come gli "elementi energetici" $h\nu$ sono ripartiti tra di essi. Secondo la fisica classica questa energia vale kT ove T è la temperatura dell'ambiente ove è situato l'insieme degli oscillatori e k è la costante di Boltzmann. Pertanto il limite di U_ν per $h \rightarrow 0$ deve valere kT .

¹⁰ U_ν è un'energia, quindi $U_\nu d\nu$ è una densità di energia.

¹¹ È la costante di Boltzmann, così denominata dallo stesso Planck, espressa nel sistema CGS con le cifre che allora risultavano.

¹² Questa equazione è un caso particolare della relazione, dimostrata in termodinamica, tra energia interna, entropia e temperatura.

¹³ [Sottolineatura mia. Il soggetto della scienza non fuorclude la verità, come sostengono gli analfabeti scientifici, numerosi in campo lacaniano, ma la approssima.]

di Giulio Manuzio e Giulio Passatore, dal cui libro, *Le costruzioni della fisica*, vol. B, Principato, Milano 2007, ho tratto le note e il commento finale a questa straordinaria *Comunicazione*.

La grande rilevanza della *Comunicazione* riportata sopra è duplice. Da una parte essa segna l'apertura a un nuovo mondo, che sarà quello della fisica quantistica. Dall'altra mostra come questa apertura sia stata possibile grazie a due formidabili costruzioni precedenti: l'elettromagnetismo maxwelliano e la termodinamica, in particolare nel suo aspetto statistico introdotto da Boltzmann. Malgrado all'epoca entrambe le costruzioni fossero ancora controverse. (si pensi alle affermazioni [desolate] di Kelvin a proposito della teoria elettromagnetica della luce e al rifiuto dell'atomismo da parte degli energetisti, che contribuì alla conclusione tragica della vita di Boltzmann), Planck ebbe il coraggio di farle proprie e svilupparle con idee nuove, che posero nuovi interrogativi. Dopo pochi anni (primo decennio del Novecento) la relatività einsteiniana risolse le difficoltà della teoria elettromagnetica della e vari esperimenti dimostrarono l'esistenza degli atomi misurando le loro masse, nonché la massa e la carica dell'elettrone. Era così possibile e fortemente motivata la costruzione della fisica moderna, che ha creato nuovi paradigmi cui riferire il nostro pensiero: non sovvertimento, bensì sviluppo verso visioni più ampie e profonde.