Un'antica dimostrazione congetturale

Carl Boyer diede un giudizio pesante sulla matematica degli Antichi Romani. Il contributo più rilevante lo diede Cicerone ai tempi in cui fu questore in Sicilia e scoprì la tomba di Archimede. Si narra che Archimede volle inciso sulla propria tomba il risultato per cui andava più fiero: l'equivalenza tra la superficie laterale del cilindro circoscritto alla sfera e la superficie della stessa sfera. In formule, $S = 4\pi r^2$ dove r è il raggio della sfera. La superficie laterale del cilindro si calcola facilmente, essendo riconducibile a quella di un rettangolo di base $2\pi r$ (il cerchio massimo della sfera) e di altezza $2r$ (diametro della sfera). Ma l'area della superficie sferica dipende dalla dimostrazione dell'equivalenza tra area laterale del cilindro e area della sfera.

La dimostrazione di questo teorema fu data da Archimede in modo rigoroso, seguendo il metodo di esaustione, inventato da Eudosso di Cnido, dimostrando che la superficie non poteva essere né maggiore né minore di $4\pi r^2$. In entrambi, i casi doveva sommare una progressione geometrica infinita, cosa su cui si era esercitato per calcolare le aree di segmenti di parabola.

Tuttavia, quando intuì il risultato, Archimede non procedette molto probabilmente per esaustione. L'intuizione matematica, anche quella dei geni, non procede analiticamente. Manipola delle grandezze o degli insiemi *in toto*. Li manipola come se fossero entità corporee. Trova analogie (in greco, *analoghia* = proporzione) e formula congetture, che poi sottopone a dimostrazione rigorosa, nel caso con il metodo esaustivo.

Quale poté essere stata la congettura-dimostrazione iniziale di Archimede?

Rispondo a mia volta con una congettura.

Secondo me Archimede intuì il risultato applicando una variante del metodo degli indivisibili, che Bonaventura propose nel XVII secolo, intorno al 1640, certamente ispirato da Archimede, le cui opere furono editate da Niccolò da Tartaglia un secolo prima, nel 1543. (Tra parentesi, quest'anno si può veramente definire l'anno di nascita del discorso scientifico, in quanto vide l'edizione anche del *De revolutionibus orbium colestium* di Copernico e del *De humani corporis* di Vesalio). Il principio di Bonaventura, applicato al calcolo dei volumi, recita:

Se due solidi hanno uguale altezza e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi e ugualmente distanti da queste stanno sempre in un dato rapporto, anche i volumi dei solidi stanno in questo rapporto.

Probabilmente Archimede non usò questo principio, che si presta facilmente a fallacie. Nel caso della sfera e del cilindro circoscritto porta a dimostrare che il volume della sfera è inferiore a quello del cilindro, mentre è uguale.

Ripeto, probabilmente Archimede usò un principio più generale ma ancora intuitivo. Poteva essere qualcosa del genere:

Se due solidi possono essere decomposti nello stesso numero di figure piane equivalenti, allora hanno lo stesso volume.

Scendiamo di una dimensione e applichiamo questo principio all'area dei due solidi suddetti: la sfera e il cilindro circoscritto. Per rendere i calcoli facili supponiamo che il valore del raggio della sfera sia π. In questo caso, il diametro della sfera e l'altezza del cilindro circoscritto sono entrambi pari a 2π. 2π non è un numero qualunque. È anche la misura in radianti dell'angolo giro, che misurato in gradi vale 360°. Bene, probabilmente pensò Archimede. In questo caso posso stabilire una corrispondenza biunivoca tra i piani che tagliano il cilindro parallelamente alle basi e i piani che passano per l'asse della sfera, passante per il centro della sfera e parallelo alla generatrice del cilindro. Si tratta di due fasci di piani, nell'un caso paralleli, nell'altro inersecantesi nell'asse della sfera. L'importante è che si possa stabilire una corrispondenza biunivoca tra un piano di un fascio e un piano dell'altro. Nel caso, il piano all'altezza α nel fascio di piani che interseca il cilindro corrisponde al piano che forma l'angolo α con un piano di riferimento arbitrario nel fascio di piani che interseca la sfera. Risultato di questa costruzione è che i piani del fascio che interseca il cilindro sono tanti quanti i piani del fascio che interseca la sfera. Poiché i due fasci, intersecando rispettivamente il cilindro e la sfera, generano figure equivalenti (equivalenti al cerchio massimo della sfera), le due superficie hanno la stessa area.

La dimostrazione è breve e, ai tempi di Archimede, doveva suonare pesantemente congetturale. Manipolava l'infinito alla Cantor come se fosse un numero, stabilendo l'uguaglianza di due infiniti di due fasci di piani diversi. Inoltre, si basava sul principio di Cavalieri, che nessuno aveva ancora dimostrato, anche perché convocava un infinito attuale, ancora ignoto ai Greci, che bazzicavano l'infinito potenziale. Si capisce, allora, perché Archimede si sia rivolto al più consolidato metodo di esaustione per dimostrare la propria congettura. Ma non è escluso che a 21 secoli di distanza da quell'intuizione archimedea siano nate, percorrendo i meandri del pensiero, le moderne teorie degli insiemi e le topologie che oggi applichiamo alla scienza moderna.

Morale: le vere congetture scientifiche sono feconde.