L’assiomatizzazione infinita

Antonello Sciacchitano

Ci si potrebbe divertire, e altri ci si è già divertito, a formulare fantaprevisioni storiche sui teoremi per cui il nostro secolo sarà ricordato. Come il teorema di Pitagora rimanda a un’epoca che va dalla media civiltà assirobabilonese ai primordi della greca, ci si potrebbe chiedere quale o quali teoremi saranno ricordati come tipici della matematica del secolo che va spirando. La scelta è imbarazzante, perché nell’ultimo secolo si è fatta più matematica che in tutti i precedenti. Ma già che è un gioco, giochiamo. Senza alcuna possibilità di ricevere il premio, scommettiamo che i nostri pronipoti ci ricorderanno per tre o quattro asserti, universalmente noti attraverso i patronimici: il teorema d’incompletezza dell’aritmetica di Gödel, il teorema del punto fisso di Brouwer (alla pari del teorema d’invarianza della dimensione di uno spazio topologico), il teorema di minimax della teoria dei giochi di von Neumann e *last but not least* il teorema di Arrow sull’impossibilità di fondare scelte collettive razionali sulla razionalità delle individuali.

I teoremi sono sapere saputo, *scientia condita*. Ma un’epoca si caratterizza anche, e forse meglio, per il sapere che non sa, cioè per le congetture che formano la *scientia condenda*. Da psicanalista, più che da storico, mi trovo implicato in una pratica quotidiana di congetture, individuali e collettive. Per loro tramite nel lavoro clinico l’inconscio mi presenta il fianco soggettivo come punto debole epistemico: la divisione tra verità e sapere, che la scienza ufficiale non può soffrire. L’eccesso della verità sul sapere, prima che Gödel lo riconoscesse in termini accettabili dalla comunità scientifica come esistenza, in ogni sistema assiomatico coerente e sufficientemente potente, di verità indimostrabili, si ripropone nelle congetture di cui pullula l’attività matematica in ogni tempo e luogo. Le congetture matematiche sono buchi nel sapere dimostrativo, ai bordi dei quali s’inarca l’attività del soggetto matematico. Le congetture analitiche, di cui ho maggiore esperienza, sono, non molto diversamente dalle matematiche, costruzioni che con inconsueto coraggio morale l’analizzante azzarda sul desiderio dell’altro, interpretandone il discorso; sono verità che parlano nel *supplemento d’anima*, si dice su queste pagine.

Trasferendo la mia esperienza alle congetture matematiche, a mio avviso isomorfe a quelle sull’inconscio (ma lascio tra parentesi la congettura), mi sento d’affermare con lo spirito dello scommettitore, quindi del dilettante e non del professionista, che almeno una congettura, garantita anch'essa dal patronimico, resterà a caratterizzare la matematica, forse addirittura la teoresi del XX secolo, non meno bene di quanto il famoso *grande teorema* di Fermat abbia caratterizzato la nascente (o rinascente, dopo Diofanto) teoria dei numeri in epoca barocca. Non occorrono più dita d'una mano se, accanto ai teoremi sopra citati, menziono anche la congettura sulla sfera tridimensionale.

Che riferisco per esteso in forma semiintuitiva perché le sue risonanze e connotazioni, come tenterò di mostrare, non sono tanto estranee al discorso che, ancora impressionato come sono dal testo di von Neumann appena tradotto, in particolare dalla sua shoccante conclusione, sto abbozzando. Ammesso che sappiate, ma non occorre entrare nei dettagli, siete adulti e filosoficamente formati e, quindi, allenati a pensare cosa pensa l'altro, dicevo, ammesso che sappiate cosa un matematico intende per spazio compatto (o trattabile in termini finiti), connesso (o non presentabile come due aperti disgiunti) e semplicemente connesso (o tale che ogni cappio è contraibile in un punto), forse vi stupirete (forse no) della conclusione d'un grande (grandissimo) matematico, tale Jules Henri Poincaré.

Il quale congetturava proprio intorno agli spazi compatti, connessi e semplicemente connessi, sostenendo che fossero topologicamente equivalenti (nel senso greco di *topos*, cioè dal punto di vista della contiguità dei luoghi) alla sfera tridimensionale, alla palla, insomma, con cui si gioca a calcio, per esempio. In altri termini, qualcosa di simile alla sfera si può definire, secondo Poincaré, senza ricorrere alla nozione d'equidistanza dal centro, concetto quantitativo che presuppone l'unità di misura, ma tramite nozioni qualitative ben più semplici: la generalizzazione della nozione di finitezza, la nozione di disgiunzione (o intersezione vuota) e la nozione intuitivamente evidente, perché legata all'immagine (pericolosa!) di topologia come geometria di gomma, di contraibilità. Bastano pochi semplici strumenti intellettuali (più semplici dell'apparato metrico) per pensare (qualcuno direbbe costruire) la sfera a tre dimensioni.

Ma non è facile dimostrarlo, benché sia facilissimo dimostrare l'inverso: che la sfera tridimensionale, come una mela con buccia e polpa, è compatta, connessa e semplicemente connessa. Ma ciò è tipico di molte grandi congetture, quella di Goldbach valga d'esempio per tutte. Anzi, è proprio il contrasto tra *diritto* e *rovescio* a ingigantire il senso d'impotenza epistemica che ogni buona congettura genera. Sembra di poterla afferrare e ... sfugge. Sembra di poterla ridurre a sapere saputo per via dimostrativa ma rimane verità *in eccesso* sul sapere. Sì, perché non ci sono dubbi che la congettura di Goldbach, secondo cui ogni numero pari è somma di due primi, sia vera.

Per così dire, la certezza congetturale (*sic*) è aperta, esposta ai quattro venti della confutazione, non facilmente codificabile in uno schema. In fondo, ogni buona congettura testimonia sempre una cosa sola: l'impotenza epistemica del soggetto che l'enuncia. Il quale si autorizza solo da sé a enunciarla, senza poter far riferimento a nessuna autorità esterna, che ne garantisca la bontà (da qui il senso propriamente etico dell'aggettivo *buona* premesso a congettura), né a qualche forma di dimostrazione riconosciuta come accettabile dalla comunità scientifica di appartenenza.

Insomma, non ci sono né scuole né ortodossie che discriminino tra congetture buone e cattive, più o meno vere, eretiche o no. Perciò tante congetture, come le interpretazioni analitiche riuscite, risultano simpatiche (le interpretazioni analitiche a volte fanno addirittura ridere). Per esempio, la congettura di Goldbach è simpatica. Non c'è dilettante di matematica che non si sia cimentato a dimostrarla. Il fatto è tipico. È il dilettante di matematica, cioè l'ingenuo, che perde tempo con congetture, incurante di dimostrarle rigorosamente. Il professionista, invece, pensa ad altro. Il grande teorema di Fermat, che nega la generalizzazione del teorema di Pitagora a esponenti superiori al due, sta per essere dimostrato indirettamente (la dimostrazione «ha il suono della verità», dice Barry Mazur) da Andrew Wiles della Princeton University come corollario della teoria delle curve ellittiche.

Ma von Neumann, del cui articolo del '25, che presenta un'assiomatizzazione della teoria degli insiemi, diamo di seguito uno stralcio sostanzioso[1], che c'entra con tutto ciò? C'entra con i teoremi o le congetture della nostra epoca? Forse direttamente né con gli uni né con le altre, ma piuttosto con la posizione etica d'incompletezza e impredicatività da cui si fa teoria, oggi. Garantisco che al termine del lungo giro *avremo ritrovato*, al futuro anteriore, von Neumann, intendo il teorico dell'insiemistica, e forse un modo di leggerlo tra le righe (da buoni intenditori, dunque), al di là del suo simbolismo matematico non certo felice e per di più oggi caduto in disuso (ma il suo tedesco compensa il lettore più esigente).

Cominciamo dalla domanda spontanea. Perché leggere, tradurre e pubblicare un'opera ormai data per addomesticata in tutte le bibliografie tecniche? Leggere, tradurre e pubblicare il primo saggio di von Neumann sugli insiemi (ne uscirà un secondo tre anni dopo), che sembra minore rispetto al trattato di seicento e più pagine sulla teoria dei giochi, scritto in collaborazione con Morgenstern? Perché è scritto bene? Fosse solo per questo, avrebbe già dovuto essere stanato dal polveroso giornale fondato da Crelle centosettant'anni fa. Invece, continua a rimanere in giacenza, lettera morta. L'operazione, condotta con un *mix*

[1] La traduzione completa comparirà su un prossimo *Quaderno di Scibbolet – Rivista di psicanalisi.*

di buona fede e cattiva coscienza dai dotti del tempo e successivi, mi sembra la tipica rimozione. Con la scusa che è stata trovata una scrittura migliore per formalizzarla, l'assiomatizzazione originale della teoria degli insiemi di von Neumann è stata superata e archiviata. Poi le si è reso onore postumo come a un monumento storico, riconoscendole un valore intrinseco incontestabile, essendo, a differenza di quella di Zermelo e Fraenkel, finitamente assiomatizzata. Il che non è poco.

Consapevoli dei suoi meriti, prima Gödel poi Bernays le hanno cucito addosso una veste accademica gradita ai professori. I quali, infatuati dall'idea di rigore formale e di verità positiva, da settant'anni ormai, si sono lasciati sfuggire la verità soggettiva di von Neumann, quel non so che di aleggiante tra le righe del testo, di inafferrabile, non essendo né dubbio sistematico, né generico scetticismo ma forse solo irriducibile parzialità, che sfugge alla presa dello spirito enciclopedico. Insensibili al fascino femminile del discorso, con la scusa di buttare via l'acqua sporca, gli intelligenti (ma non tra le righe) hanno buttato via anche il bambino – la cosa – che dentro al discorso ci sguazzava bene. Uno scarto, allora. Non dovrebbe stupire che interessi l'analista.

La cosa, appunto. È lei la protagonista delle due dozzine di pagine, recuperate a Berlino da un amico psicanalista. E di lei cercherò di parlare da analista, come so fare, magari con l'aiuto di qualche personaggio più autorevole di me, Lacan, per esempio. Il mio progetto di ricerca è preciso e più etico – dimostrare che si può fare – che noetico – dimostrare che si può venire a sapere. Lo scopo per cui ho promosso la ripubblicazione di questo lavoro di von Neumann è dimostrare che si può realizzare un rigore, non necessariamente *scientifico* ma sufficientemente *pubblico*, anche là dove la soggettività parla e si costruisce.

L'idea che la matematica, come ai tempi diede a Galileo una mano per formalizzare la neonata cinematica dell'oggetto, possa oggi aprire nuove vie a chi si affaccenda intorno a teorie non antropomorfe del soggetto, potrà imbarazzare più d'uno. Ma solo chi, gabbato dall'idealismo male appreso a scuola, ignora l'aspetto estetico e creativo del procedere matematico perché, obnubilato dal conformismo conseguente al deterioramento dello stesso idealismo, è stato dai programmi ministeriali vigenti intellettualmente condizionato ad appiattire il discorso matematico sullo scientifico.

Per fissare le idee e riacchiappare l'interesse di chi ha già deciso di saltare le pagine seguenti perché fitte d'ideogrammi indecifrabili, tenterò, più che la parafrasi, un'introduzione ai concetti guida che le informano, riferendomi al contesto storico in cui von Neumann riuscì ad assiomatizzare la teoria degli insiemi mediante funzioni.

Innanzitutto, occorre rispondere a una domanda preliminare. Perché ricorrere al metodo assiomatico per esporre una teoria matematica, in particolare la teoria degli insiemi? Per una questione estetica? Per eguagliare la chiarezza espositiva e il rigore logico della presentazione euclidea della geometria? Si voleva costruire una teoria degli insiemi *geometrico more demonstrata*? Anche, ma non solo. All'inizio del secolo, dopo i famosi congressi di matematica e di filosofia tenuti ai primi del secolo a Parigi, il metodo assiomatico era stato rilanciato da Hilbert come via per evitare una certa fanfara d'antinomie, che proprio nella teoria degli insiemi cosiddetta *ingenua* aveva fatto risuonare un'allegria un po' troppo pesante. Proponendo la sistemazione assiomatico-deduttiva della matematica come punta avanzata del proprio formalismo, Hilbert faceva pesante ricorso al valore della scrittura, contro Brouwer che privilegiava l'atto mentale o intuitivo del matematico, trascendentale rispetto a ogni incarnazione linguistica.

Furono proprio l'assiomatizzazione di Hilbert della geometria euclidea, concepita in risposta alle nuove geometrie non euclidee, insieme a quella della logica dei predicati di Frege, che formalizzava la vecchia logica aristotelica, a costituire i modelli di tutte le assiomatizzazioni successive. Nel campo della teoria degli insiemi, insigni esponenti del formalismo hilbertiano avevano già proposto con successo il loro *modello assiomatico*, noto ancora oggi con la sigla ZF (Zermelo-Fraenkel).

Al di là di preoccupazioni fondazionali intervenivano, poi, considerazioni estetiche consolidate, risalenti per lo meno a Euclide, a raccomandare il metodo assiomatico-deduttivo. Innanzitutto, le teorie assiomatiche sono eleganti: cioè concise, univoche, generali. In secondo luogo, sempre più matematici ricorrevano all'assiomatizzazione, ideologicamente convinti come erano d'essere al riparo da contraddizioni. E in ambiti parziali (come quelli citati), dove veniva di volta in volta applicato, il metodo assiomatico sembrava funzionare, producendo risultati egregi. In logica per esempio, grazie a tale metodo si poteva ridurre la logica dei predicati a quella degli enunciati e, dimostrando la coerenza dell'una, si guadagnava anche quella dell'altra.

E la dimostrazione di coerenza per tutta la matematica (o almeno dell'aritmetica, come richiedeva il secondo problema di Hilbert presentato al congresso di Parigi)? Qui viene il bello. Von Neumann, o qualcuno vicino a lui, misero in giro la storiella seguente. Conosciuto il giovane genio, Hilbert, ormai sessantenne, gli affidò il programma che più aveva a cuore: dimostrare la non contraddittorietà dell'aritmetica. Johann accettò l'incarico con l'imprudenza che nei giovani è pari solo all'entusiasmo e si mise a lavorare ventre a terra. Dopo una settimana di lavoro si arenò su una difficoltà. Stanco, senza averla superata, si gettò a dormire e sognò la soluzione dell'*impasse*. La mattina dopo riprese con maggior entusiasmo a maneggiare teoremi ma un nuovo e più difficile passaggio lo attendeva. Ancora una volta sembrava impossibile forzare la via. Provvidenziale fu il secondo sogno, che gli indicò come venirne a capo. Altro lavoro, altri importanti passi avanti, finché si presentò il terzo ostacolo. Definitivo perché non ci fu il terzo sogno. «Per fortuna», commentava von Neumann alla fine della storiella.

Sì, per fortuna la matematica non si può dimostrare coerente *prima* di farla. Se fosse possibile non ci sarebbe più senso per il lavoro matematico, non più lavoro per i professori di matematica, che sistemano le teorie degli altri, non più spazio per gli avventurieri che aprono nuovi territori di ricerca. Tutto la matematica si farebbe al computer. Addirittura, la farebbe il computer, togliendo lavoro al matematico. Come una meccanica psicoterapia, a cui si vuole ridurre la psicanalisi, sta togliendo lavoro all'analista.

Qualcosa dello spirito della storiella è racchiuso nell'articolo del '25 qui tradotto, soprattutto nell'ambigua frase finale contro la teoria degli insiemi[2] (*ein weiteres Bedenken gegen die Mengenlehre*, dove *Bedenken* si può tradurre in modo più forte del nostro, perfino con *obiezione*). Ricordiamo che siamo a soli sei anni prima del crollo del programma formalistico di Hilbert, graziato dal teorema d'incompletezza di Gödel. Dal 1931 in poi le dispute sulle antinomie calano di volume e la matematica è definitivamente riconosciuta come *non tutta scrivibile*, verità non tutta traducibile in sapere (l'etimo greco di matematica significa proprio *sapere*), essenzialmente congetturale. Fermo restando il fatto che, *in parte*, la matematica si può scrivere e sapere, proprio grazie al metodo assiomatico-deduttivo, che ora decade a mero strumento di lavoro, avendo perso l'aura ideologica di garante della non contraddittorietà della matematica.

L'analista direbbe che la matematica moderna si è femminilizzata, accettando d'essere più verità e meno sapere, sulla linea battuta, ormai da un secolo, dall'inconscio freudiano con certe sue congetture intellettualisticamente molto spinte sulla sessualità – si pensi alla congettura fallocentrica, che suona «scandalo per gli ebrei e follia per i pagani». Dal 1931, infatti, scrivere di matematica ha acquisito un fascino diverso dall'antico. Per i pitagorici e i neoplatonici di tutte le epoche la matematica fu la verità eterna del mondo, già scritta in qualche libro immateriale, la vera Sacra Scrittura, ben diversa dalla Bibbia, però, perché non dettata da nessun Dio a nessun profeta. Per i post-hilbertiani, invece, scrivere di matematica, anche in modo assiomatico, è diventato un fatto un po' meno sacro e un po' più laico: si rapina un po' di verità che non si voleva concedere o la si gode per caso, *vulgivagante*, diceva Lucrezio, in qualche trivio del sapere. Caccioppoli, il famoso matematico napoletano, ricordava il precetto etico del matematico, che non deve amare la matematica, ma, possibilmente, farsi amare da lei.

Ma torniamo a cose serie, cioè all'articolo di von Neumann. Siamo ancora al primo capitolo, che espone la sua assiomatizzazione. Nel § 1, introduttivo, presenta le ragioni del proprio lavoro. Che pretende *riabilitare* la teoria ingenua degli insiemi dalle macchie delle antinomie. È il tema, di chiara marca idealistica, dell'emendazione, ricorrente nella storia della matematica pregödeliana. (Si pensi all'*Euclides ab omni naevo vindicatus* del gesuita Saccheri). La ricostruzione storica di von Neumann è ancora oggi valida. Due erano le posizioni che si fronteggiavano. Da una parte, si voleva risanare dalle fondamenta *tutta* la matematica; per esempio, Russell pretendeva, al seguito di Frege, di ridurla a logica, contro Brouwer e Weyl, appoggiati all'esterno dal convenzionalista Poincaré, che tentavano di fondare la matematica sul costruttivismo, eliminando, almeno nel caso dell'infinito, le dimostrazioni esistenziali basate sul terzo escluso. Dall'altra parte, invece, si schierava il partito pragmatista del *si salvi chi può* o, meglio, *cosa si può*, in particolare porzioni ristrette della teoria degli insiemi. Era il partito più numeroso, capeggiato dai Zermelo, Fraenkel e Schönflies sotto le cui insegne, pare con qualche ritrosia, sembra iscriversi anche von Neumann. Che si trovò così tra i discepoli di Hilbert, alla cui scuola apprese il metodo assiomatico. Appena ventiduenne, il Nostro si sentì in diritto di proporre un proprio sistema assiomatico della teoria degli insiemi, alternativo a quello Zermelo-Fraenkel in più d'un punto, per es. perché finitamente assiomatizzato. (Privo, cioè, dell'assioma di rimpiazzamento, che in realtà è uno schema d'assiomi equivalente a una serie infinita).

Nella nota storica al suo primo libro degli *Elementi di matematica*, intitolato appunto *Teoria degli insiemi*, Bourbaki così commenta l'operazione di von Neumann: la sua assiomatizzazione, afferma, «si avvicina alla concezione primitiva di Cantor» più di Zermelo-Fraenkel. «Per evitare gli insiemi paradossali, Cantor, aveva già proposto, nella corrispondenza con Dedekind, di distinguere due tipi d'insiemi, le molteplicità (*Vielheiten*) e gli insiemi (*Mengen*) propriamente detti, caratterizzati dal fatto che possono essere pensati come un solo oggetto» (Hermann, Parigi, 1970, E IV.64).

È chiaro, ma è doveroso ribadirlo, che esistono molteplicità segnate da un'impossibilità logica molto grave per il pensiero monistico, quasi un'onta di cui non vuole sentire parlare il fobico del fallimento dell'Uno. Si tratta dell'esistenza di molteplicità che non possono

---

[2] «Per ora non possiamo fare nulla di più che affermare che qui si trova un'ulteriore riflessione

essere pensate come unità, in particolare come oggetti elementari. Dimenticare o rimuovere tale faccia oscura della medaglia insiemistica significa aprire le porte alla nostalgia dell'idealismo deteriore dove *tutto diventa agevolmente uno* (dittatura in politica), senza scarti che non siano facilmente evacuabili (dietro l'angolo il razzismo).

Premesso che nel § 2 von Neumann decide d'assiomatizzare le molteplicità nel linguaggio della teoria delle funzioni, un vezzo del Nostro che cadrà nelle successive versioni dell'assiomatizzazione date da Gödel e Bernays, la distinzione cantoriana ritorna e si articola nel lavoro di von Neumann come tricotomia (di ascendenze peirceane?) tra I-cose, II-cose e I.II-cose. Le prime formano la classe degli *argomenti*, le seconde delle *funzioni*, le terze sono funzioni che possono essere argomenti d'altre funzioni (*argomenti-funzioni*, le chiama von Neumann, cioè cose *non troppo grandi* per poter essere considerate soggetti di qualche predicazione). Segnaliamo, senza approfondire il fatto, che all'orizzonte del discorso si delinea una topologia. In effetti, la sistemazione di Gödel e Bernays dell'assiomatizzazione di von Neumann propone, di fatto, una topologia i cui aperti di base (ossia gli elementi tipici della struttura) sono insiemi. Ma procediamo.

È chiaro che esistono I.II-cose. (Anche se è più prudente garantirsene l'esistenza con un assioma. Cfr. Gli assiomi del IV gruppo). Ma il fatto veramente interessante è che *non sempre* una II-cosa può essere *oggettivata* come I-cosa; non sempre, cioè, una funzione è adatta a diventare argomento d'una funzione, nello stesso senso in cui si dice *argomento d'un discorso*. In altri termini, d'una cosa siffatta non si può predicare qualche proprietà, considerandola come un tutto. Il nucleo concettuale dell'esposizione di von Neumann è tutto qui. Ci piace dirlo *à la* Lacan perché è inusuale in matematica (come avverte Lacan stesso) e introduce forse un pizzico di novità. Diciamo che *non tutte le seconde cose sono prime cose*. Lacan aggiungerebbe che le seconde cose sono come le donne (il secondo sesso?), cioè *non tutte* (nel senso che non formano totalità unificabili come elementi di altre totalità).

La terminologia con il tempo si evolve e diventa più perspicua. Oggi, riprendendo Cantor, non si parla di I-cose e II-cose ma di *classi*. Si distingue, poi, tra *insiemi*, che appartengono a classi, e *classi proprie* che non appartengono a classi. È l'uovo di Colombo che già Cantor aveva forzato a stare ritto. Con un po' di attenzione, dagli assiomi proposti si può derivare tutta la teoria degli insiemi nota, senza imbattersi in antinomie. Non è una dimostrazione di coerenza ma ci si avvicina. E von Neumann, in ciò figlio del suo tempo, vi si dedica nei restanti paragrafi del primo capitolo.

(*Bedenken*) contro la teoria degli insiemi e che per ora non è nota alcuna via di riabilitazione».

Chiarito il punto, ci sembra che il lettore sia ora intellettualmente attrezzato per affrontare da solo i dettagli del testo, se vuole. Forse non ha più bisogno del nostro corrimano, lasciandoci liberi di passare ad altro. Prima avvertiamo che del primo capitolo diamo di seguito, oltre ai §§ 1 e 2, un riassunto del § 3 è la parte finale del § 4. Del secondo capitolo, che contiene l'esame critico degli assiomi proposti, omettiamo i primi due paragrafi, destinati come sono ai tecnici della teoria degli insiemi, e saltiamo agli ultimi tre (§§ 3-5), che ci consentono di riannodare, forse qualcuno se lo era dimenticato, forse altri non se lo aspettava più, il filo del discorso di Poincaré sulla sfera tridimensionale.

Nelle considerazioni finali troviamo forse il segreto della fortuna-sfortuna di von Neumann. È un fatto che il von Neumann teorico degli insiemi ebbe meno fortuna, non solo in Italia, dell'inventore della teoria dei giochi, del fisico quantistico e del cibernetico. Per quanto riguarda la teoria dei giochi la fortuna si spiega facilmente: si tratta d'una novità assoluta nella storia del pensiero matematico. Il suo valore psicanalitico non sfuggì a Lacan che vi vedeva una matematica dell'intersoggettività non banalizzata dal psicologismo. Non c'è bisogno di sondaggi d'opinione: oggi tutti sanno cos'è un gioco a informazione incompleta o a somma zero. Sono termini entrati nel discorso comune. Il teorema di von Neumann riguarda proprio tale classe di giochi. Per cui stabilisce l'esistenza della soluzione. Esiste, cioè, ed è unica, la strategia ottimale del gioco. Si tratta, infatti, della combinazione probabilistica di strategie elementari, discostandosi dalla quale un giocatore può, sul lungo periodo, solo perdere. La teoria di von Neumann è tanto potente non solo da garantire l'esistenza ma addirittura da fornire l'algoritmo per calcolare la soluzione del gioco. Non è poco e, soprattutto, è molto rassicurante. La stessa rassicurazione non ci viene, per esempio, dalla teoria dei giochi a somma diversa da zero, o cooperativi, per cui disponiamo solo di simulazioni su calcolatore e analisi empiriche, famose quelle di Axelrod.

L'aspetto di matematica rassicurante non manca altrove nella vastissima produzione di von Neumann. Lo si trova soprattutto nel von Neumann cibernetico e teorico dei computer, questi potenti strumenti di conformazione e di controllo sociale. Ma è proprio del tranquillante conformismo che mancano tracce nelle pagine conclusive dell'articolo che stiamo riportando alla luce dopo settant'anni di «sonno dogmatico». È il non conformismo del pensiero che giustifica, ai nostri occhi, l'inattualità di von Neumann teorico degli insiemi. Il dogma, infatti, è positivo, quando è religioso. Quando è scientifico è addirittura positivista. In un caso e nell'altro lo spirito dogmatico preferisce addormentare le *performance* del metodo assiomatico che lascia pericolosamente correre la verità tra una *degnità* e l'altra (sono degni di verità gli assiomi, etimologicamente parlando, ma non ne sono gli unici depositari). Il dogmatismo – scientifico nel caso – ha rimosso volentieri lo scritto del Nostro, credo, per la sottile negatività che vi serpeggia (soprattutto là dove discute una serie d'assiomi alternativi, sempre impotenti a cogliere il senso vero dell'esperienza matematica), spingendo autore e lettore su posizioni d'inquieta paradossalità, come testimoniano le affermazioni a proposito dei modelli della teoria degli insiemi, della non categoricità e dell'infinito.

Potremmo cominciare dalla dichiarazione di relativismo. Nel § II. 3 leggiamo: «È essenziale a questo punto eliminare tutte le incomprensioni. Nel sistema Σ' esiste una serie d'insiemi e d'applicazioni. Gli insiemi hanno tutte le potenze possibili. *Ma sono tutte solo apparenti* (sottolineatura nostra). Sono potenze relative al gruppo delle applicazioni del sistema. Infatti, nonostante la sua perfezione formale, il sistema Σ' non contiene tutte le applicazioni pensabili». Affermazione che da sola basterebbe a sgasare la bolla d'ingenuo entusiasmo per la catena ascendente dei transfiniti, ideata da Cantor. La dura *lex* che vige in ogni sistema simbolico, infatti, è che i quantificatori logici *per ogni* ed *esiste*, indispensabili per ogni costruzione insiemistica, sono sempre relativi all'*universo di discorso*, quindi contingenti, mai assoluti.

Al punto tale che la stessa definizione di finitezza ne risulta gracilizzata. Sappiamo che la finitezza era il miraggio fondazionale di Hilbert. Che qui svanisce. Già svanita da un pezzo era la consistenza degli infiniti d'ordine superiore al numerabile, da quando Löwenheim, nel 1915, e Skolem, nel 1923, dimostrarono, indipendentemente l'uno dall'altro, che ogni infinito più che numerabile, se ha un modello, ha un modello numerabile. Von Neumann arriva ad affermare (§ II. 5), riecheggiando Kronecker, che l'unica certezza è l'infinito dei numeri interi (che non è un numero intero!). Al di sotto – nel finito – e al di sopra – nel transfinito – valgono solo congetture. Quarant'anni prima Kronecker aveva giustiziato Cantor con verdetto più impietoso. La versione di von Neumann è solo formalmente meno incivile: «La costruzione appena esposta imprime a ogni teoria assiomatica degli insiemi il marchio dell'irrealtà o, con parola molto usata, dell'*impredicatività*» (§ II. 3).

Concluderemo il discorso con la parola appena sottolineata: *impredicatività*. Prima, però, è necessario un accenno alla questione dei modelli e della categoricità.

Un lacaniano che parla di modelli ha l'obbligo d'avvertire pubblicamente, pena la scomunica da parte dei confratelli, che la nozione di modello ripugnava al loro maestro. Oggi si può tranquillamente affermare che era solo un suo tic mentale a cui conviene non identificarsi. Certo, Lacan aveva le sue buone ragioni, che non sono le nostre, per non voler sentire parlare di modelli. Alla scuola di Kojève si era formato su Hegel, dai cui *Aforismi jenensi* aveva appreso che «nella filosofia non c'è nulla da rappresentare» (*Af.* 87). Siccome i modelli servono a rappresentare la struttura, sono da proscrivere dal discorso filosofico, deduceva l'allievo che aveva imparato la lezione. In pratica, il ricorso ai modelli è inevitabile se si vuole lavorare ... in teoria. Infatti, non si può lavorare direttamente sulla struttura che, in quanto tale è una finzione (alla Bentham, come il linguaggio o la legge morale). Sulla struttura si può lavorare solo indirettamente a partire da *presentazioni*, i modelli appunto che la *rappresentano* in contesti definiti e per scopi prefissati.

Nella teoria degli insiemi i modelli sono doppiamenti essenziali. Primo, per la ragione appena detta e, secondo, per una sorta d'autoriferimento. Infatti, i modelli stessi sono insiemi. Nel nostro caso sono insiemi in cui valgono le relazioni strutturali degli insiemi. In altri termini, nella teoria degli insiemi i modelli sono sempre modelli interni. Nozione, quella di modello interno, che sarebbe piaciuta al Lacan dell'inesistenza del metalinguaggio (nel senso che ogni metalinguaggio è sempre *interno* al linguaggio), proposta dallo stesso von Neumann in altri saggi, nella cui analisi purtroppo non possiamo addentrarci. (Rimandiamo, in Italia, ai lavori della Dalla Chiara Scabia).

Qui ci basta affermare che, in fondo, i modelli sono strumenti d'analisi. Un po' rozzi, se si vuole, in quanto riducono le questioni d'esistenza alla semplice verifica di proprietà del modello (qualcosa d'insopportabile per l'idealista che preferisce il *ron-ron* generico all'elucubrazione concreta su qualche fattispecie), ma comunque necessari ad avviare un discorso specifico. Finita la funzione catalitica nella reazione chimica di passaggio da una teoria all'altra, i modelli si possono tranquillamente cestinare o, tutt'al più, archiviare. Potranno servire per altre catalisi. Lasciarli sul tavolo di lavoro, o, peggio, venerarli come il verbo incarnato dell'ortodossia, intralcia l'elaborazione teorica successiva[3].

Il punto essenziale da ritenere è che le teorie matematiche moderne, a differenza delle antiche, prime fra tutte la geometria euclidea, non sono categoriche (Bourbaki preferisce dirlo in positivo e usa il termine *multivalenti*). Cioè, è possibile presentarle con modelli non isomorfi. È il caso tipico delle teorie ricche almeno quanto la teoria degli insiemi o l'aritmetica, per le quali non si dà il modello *giusto* che incorpora tutte le relazioni che in essa vigono. Alcuni modelli presentano meglio alcune proprietà strutturali, altri altre. Naturalmente, ciò fa problema solo ai professori che non dispongono del modello *ortodosso* da

[3] Qui aveva ragione Lacan a proscrivere l'uso di modelli. Perché rischiano di generare scolasticismo? Sì, perché in mano a falsi maestri diventano strumenti per fondare pseudoscuole. Che si riconoscono da come riducono la struttura a qualche modello, per lo più varianti banali di quelli magistrali.

propinare ai propri allievi. D'altra parte, ed è bene così, dal 1931, cioè dopo Gödel, non ci sono più scuole di matematica che difendano proprie ortodossie. (Tanto va segnalato per sottolineare l'interconnessione stretta tra politica e teoria quando entrambe sono elevate). L'ultima grande scuola di matematica, o di Bourbaki, ha praticamente chiuso i battenti su un risultato paradossale: nata per soddisfare esigenze estreme di formalismo, ha finito per propagandare e portare al successo suo malgrado gli azzeccati abusi linguistici (leggi intuitivi) che proscriveva.

Per quanto riguarda l'assiomatizzazione di von Neumann la non categoricità si lascia riassumere in modo divertente in aforisma. Posto che la teoria degli insiemi sia la *cosa* di cui von Neumann tenta di dare un modello (sintattico), si può epigraficamente dire che *alla cosa non si arriva partendo dalle cose*, neppure se sono prime o seconde o prime e seconde simultaneamente[4]. Alla teoria degli insiemi non si applica il programma *e pluribus unum*, che già tante prove fallimentari ha dato di sé, per esempio in politica internazionale. Neppure se von Neumann costruisce per noi una teoria che tratta (senza contraddizioni!) insiemi *più grandi* di quelli ammessi da Zermelo e Fraenkel, per esempio la classe totale di tutti gli insiemi. «Per la *grande* teoria degli insiemi», conclude von Neumann, «il modello resta sconosciuto» (§ II. 4).

Succede per la Cosa insiemistica, e qui ritroviamo il punto da cui siamo partiti, come per la sfera tridimensionale di Poincaré. Non si riesce a costruirla, prima che passi il secolo, con gli strumenti qualitativi della nostra topologia. E, cosa più irritante, qualunque cosa si costruisca, non si è certi d'aver costruito *la* sfera. La sfera, simbolo della teoresi occidentale, da Parmenide in poi, si mostra per come è, «oggetto ottuso», ossia inafferrabile, come lo definisce Lacan nel seminario sull'*Identificazione* (inedito). La sfera, simbolo millenario del rapporto armonico e complementare tra verità e sapere, con i teoremi e le congetture citate decade dalla teoresi del XX secolo, che al successivo consegna un solido e definitivo guadagno: la *Spaltung* o divisione del soggetto della scienza, smembrato tra ciò che sa e ciò che è vero. La scienza del XXI secolo dovrà lavorare sui cocci della sfera parmenidea della rotonda verità, che ormai si è rotta per sempre.

Ciò depone contro ogni formalizzazione, in particolare della teoria degli insiemi? come pare suggerire lo stesso von Neumann in chiusura del suo articolo. Siamo sicuri di no. Non poter dare la formalizzazione conclusiva e totale d'una teoria non impedisce la ricerca di formalizzazioni parziali. La formalizzazione continua ... all'infinito. L'analista, che se è

---

[4] Sarà per questo che nelle nostre aule universitarie non si parla più di *cose* ma di *oggetti*? L'analista ripropone l'intrigante problema del rapporto tra Cosa e oggetto. Per malignità? No, perché ha la necessità

freudiano è abituato a lavorare con teorie parziali, ha qualcosa da insegnare al matematico in merito. Anche se non ha, come il matematico, una teoria dell'infinito, l'analista sa che la *cosa*, come la sfera di Poincaré, rimane inaccessibile ai suoi strumenti epistemici. Che sono impotenti ad artigliare il reale. Il reale, l'uno sferico degli antichi, rimane fuori dalla portata degli strumenti logici come impossibile. Del reale sullo schermo della logica si può cogliere solo l'ombra, il marchio dell'impossibile che, nel tentativo di dirlo, si presentifica come silenzio. *Favete linguis*.

Da ultimo, se mai ci sarà chi nutre siffatta curiosità, magari stimolata ma non soddisfatta da allusioni precedenti, resta da spiegare perché mai l'analista debba interessarsi all'assiomatizzazione della teoria degli insiemi, in particolare a quella di von Neumann. Forse perché un analista è un avventuriero che gode a rapinare i sistemi di pensiero altrui, per abbigliarsene come con penne di pavone? Non è escluso. Si pensi a come Freud si appropriò di Frazer e Lacan saccheggiò de Saussure. Quasi si trattasse di riappropriarsi di roba propria. O si tratta forse del fatto che, come sostiene Bourbaki, «uno dei vantaggi del sistema di von Neumann è la riabilitazione della nozione di *classe universale* utilizzata dai logici del XIX secolo»? (loc. cit. E IV. 65). Questo, invece, è escluso. Nulla di meno può interessare all'analista della classe universale. In pratica l'analista lavora passando dal particolare al particolare. Sullo sfondo, l'universale rimane come meramente possibile. Neppure la non contraddittorietà lo commuove più di tanto, lui che si muove in un sistema, l'inconscio appunto, dove il simbolo della negazione non serve a negare ma come visto di passaggio per attraversare certe dogane psichiche, per es. al confine tra Io ed Es. Allora?

Credo di non potermi esimere dal formulare un'ipotesi, visto che ho promosso la presente traduzione. L'interesse dell'analista per la logica degli insiemi è giustificato dalla dose d'impredicatività, che la trattazione dell'infinito, inteso come ciò la cui verità è impossibile formalizzare compiutamente, ossia trasformare in sapere senza resti enigmatici, mette inevitabilmente in gioco. Arriverei addirittura ad affermare che *impredicativo* è un buon modo di presentare l'inconscio freudiano con termine più felice dello stesso di Freud. E mi spiego. La definizione impredicativa, nel senso di Poincaré – sì, non è un caso: è proprio lui, lo stesso della congettura sulla sfera tridimensionale – porge un insieme assumendo che o preesista alla definizione o si dia *sincronicamente* al tempo logico della definizione stessa. Per esempio, la classe di tutti gli insiemi con più di cinque elementi è definita impredicativamente. Infatti, avendo, come si constata facilmente a posteriori, più

---

pratica di capire qualcosa della sublimazione dove «un oggetto è elevato alla dignità della Cosa» (J. Lacan, *L'éthique de la psychanalyse. Le Seminaire. Livre* VII, Seuil, Paris, 1986, p. 133).

di cinque elementi, contiene se stessa prima d'essere definita. L'inconscio è impredicativo nello stesso senso. Si tratta della peculiarità della memoria inconscia che Freud chiama, con termine tedesco intraducibile, *Nachträglichkeit*. L'inconscio e il suo soggetto si possono cogliere solo in seconda battuta, quando si riconosce – ma ormai Euridice è persa per la seconda volta da Orfeo – che le cose devono essere andate proprio in quel modo.

Come abbiamo visto, von Neumann usa il termine *impredicativo* in senso leggermente diverso, ossia come ciò che non si può presentare in modo univoco, eppure se ne parla lo stesso a partire da presentazioni diverse, con tutte le ambiguità che i riferimenti a modelli non confrontabili comportano. Precisamente, sono impredicative «le II-cose che non sono I.II-cose». Ma, avverte (e noi condividiamo pienamente l'avvertimento), «invece di vietarle interamente, diventano semplicemente inadatte a essere dichiarate argomenti (non sono I-cose!)» (cfr. § I.3). La correzione minore che l'analista si arroga il diritto d'apportare al discorso, in base alla pratica del suo, è d'ordine logico. Non si tratta, infatti, di semplice incapacità (*Unfähigkeit*) o impotenza o inadeguatezza ma d'impossibilità strutturale del sistema, che non riesce a sanare il difetto interno di transitività, per cui si danno sempre funzioni impensabili come argomenti di altre funzioni. Si tratta della peculiarità di ogni sistema simbolico degno del nome, compreso l'inconscio organizzato come un linguaggio. Siamo qui arrivati ai margini dell'ombelico, o abisso, di reale, che sta a fondamento del simbolico. Ma ci guardiamo bene dal gettarci dentro a capofitto e ci limitiamo a farne il giro.

Ci fu un tempo in cui si pensava che l'impredicativo fosse cattivo e causasse le antinomie. Oggi se ne ha meno paura. Il professor Bernays, con il trucco delle classi proprie che non sono elementi d'altre classi, ci ha insegnato a padroneggiarlo senza contraddizione. Anche l'analista dovrebbe imparare a padroneggiarlo, viste le tante occasioni in cui il lavoro analitico, teorico e pratico, si imbatte in classi proprie, il cosiddetto *non tutto* della terminologia lacaniana. Analiticamente parlando, classi proprie e *non tutto* sono fatti parziali. Godono della stessa parzialità (o in-finitezza, oseremmo dire) in cui sono immersi i fatti cui la clinica analitica si interessa. Naturalmente, l'elenco è parziale. Vi si trovano di certo il linguaggio, il femminile, il paterno, il pulsionale, l'inconscio stesso. Forse l'analista può riconoscere altri esempi di classi proprie e segnalarle alla comunità epistemica che lavora sul soggetto: analisti filosofi artisti, qualche scienziato pentito... A costoro dedico il frutto del mio sforzo e a chi è all'inizio del nuovo percorso teorico auguro: *sit tibi iter leve*.

(“aut aut, 280-281, lug-ott 1997, p. 93)

(torna alla home)