J o u r n a l

für die

reine und angewandte Mathematik

fondato da A.L. CRELLE, 1826

edito da K. HENSEL

con la collaborazione di

SCHÄFER, SCHLESINGER, SCHOTTKY

vol. 154

in quattro quaderni

Walter De Gruyter & Co.,

Berlino e Lipsia

1925

Eine Axiomatisierung der Mengenlehre.

Von *J. v. Neumann* in Budapest.

Inhaltsverzeichnis

I. Das Axiomensystem.

§ 1. Prinzipielles zur Axiomatisierung der Mengenlehre.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, eine logisch einwandfreie axiomatische Darstellung der Mengenlehre zu geben. Ich möchte dabei einleitend einiges über die Schwierigkeiten sagen, die einen derartigen Aufbau der Mengenlehre erwünscht gemacht haben.

Die Mengenlehre hat bekanntlich in ihrer ersten „naiven" Fassung, die ihr *Cantor* gab, zu Widersprüchen geführt. Es sind die bekannten Antinomien von der Menge aller Mengen, die sich nicht enthalten (*Russell*), von der Menge aller transfiniten Ordnungszahlen (*Burali-Forti*), von der Menge aller endlich definierbaren reellen Zahlen (*Richard*)[1]. Da die naive Mengenlehre unleugbar zu diesen Widersprüchen führte, aber andererseits ein umgrenzter Teil ihrer Sätze exaktzuverlässig zu sein schien, und da obendrein die moderne Formulierung der Mathematik auch unbedingt ein mengentheoretisches Fundament benötigte, so hat es an Versuchen zur „Rehabilitation" der Mengenlehre nicht gefehlt. Dabei sind grundsätzlich zwei verschiedene Richtungen zu unterscheiden. Eine Reihe von Autoren sah sich durch die Antinomien der Mengenlehre veranlaßt, der das gesamte

[1] Siehe z. B. *Poincaré*, Wissenschaft und Methode, deutsch von *F.* und *L. Lindemann*, Leipzig-Berlin, 1914.

Un'assiomatizzazione della teoria degli insiemi[2]

di *Johann von Neumann* (Budapest)

Indice

I. Il sistema assiomatico.

§ 1. Principi di assiomatizzazione della teoria degli insiemi.

Scopo del presente lavoro è di presentare una teoria assiomatica degli insiemi priva di obiezioni logiche. Introducendola vorrei soffermarmi sulle difficoltà che hanno reso desiderabile la costruzione di siffatta teoria degli insiemi.

Come è noto, nella formulazione *ingenua* di Cantor, la teoria degli insiemi è andata incontro a contraddizioni. Sono note le antinomie dell'insieme di tutti gli insiemi che non contengono[3] se stessi (Russell), dell'insieme di tutti i numeri ordinali transfiniti (Burali-Forti), dell'insieme di tutti i reali finitamente definibili (Richard).[4] Dato che la teoria ingenua degli insiemi portava innegabilmente a certe contraddizioni, mentre d'altra parte una porzione sconfinata di suoi teoremi sembrava essere scientificamente (*exakt*) affidabile e dato che, per di più, la formulazione moderna della matematica andava incondizionatamente richiedendo un fondamento insiemistico, non sono mancati tentativi di *riabilitare* la teoria degli insiemi.

In proposito vanno distinte due direzioni di fondo. Una serie di autori si sentiva indotta dalle antinomie della teoria degli insiemi a sottoporre a critica il fondamento

[2] Cfr. "aut aut" 280-281, 1997, p. 107 per una traduzione antologica, preceduta dall'introduzione di A. Sciacchitano dal titolo: *L'assiomatizzazione infinita*.

[3] Rispetto alla terminologia attuale, von Neumann usa ambiguamente il verbo *enthalten* (*contenere*) sia nel senso che qualcosa *é incluso* in qualcos'altro sia nel senso che qualcosa *appartiene* a qualcos'altro. Non abbiamo voluto "correggere" né questo né altri casi di ambiguità, confidando sul fatto che il lettore moderno non farà fatica a risolverli. [N.d.T.]

[4] Cfr. per esempio H. POINCARÉ, *Science et méthode* in *Acta Math.* XXII, 1899.

logische Fundament der exakten Wissenschaften einer Kritik zu unterziehen. Sie setzten sich das Ziel, die ganze exakte Wissenschaft auf eine allgemein einleuchtende neue Basis zu stellen, von der das „richtige" in Mathematik und Mengenlehre wieder erreicht werden konnte, aber das Widerspruchvolle vermöge der unmittelbar-anschaulichen Fundierung a priori ausgeschlossen sein mußte. Es sind hier die Herren *Russell*, *J. König*, *Weyl*, *Brouwer* zu nennen[5]. Sie gelangten zu ganz verschiedenen Resultaten, aber der Gesamteindruck ihrer Tätigkeit ist ein geradezu vernichtender. Schon bei Russell erscheint die ganze Mathematik und Mengenlehre als auf dem höchst problematischen „Reduzibilitätsaxiom" beruhend, und *Weyl* und *Brouwer* lehnen konsequent den größten Teil von Mathematik und Mengenlehre als vollkommen sinnlos ab. Es hat sich hier überhaupt keine Rehabilitation der Mengenlehre ergeben, wohl aber eine sehr scharfe Kritik der bisher gebrauchten elementar-logischen Schlußweisen, insbesondere der Prinzipien „vom ausgeschlossenen Dritten", „alle", und „es gibt".

Die andere Gruppe, die Herren *Zermelo*, *Fraenkel* und *Schönflies*, hat von einer so radikalen Revision abgesehen[6]. Die logische Methode wird nicht weiter kritisiert, sondern beibehalten; nur der (zweifellos unbrauchbare) naive Begriff der Menge wird verpönt. Man wendet, um diesen Begriff zu ersetzen, die axiomatische Methode an; d. h. man konstruiert eine Reihe von Postulaten, in denen das Wort „Menge" zwar vorkommt, aber ohne jede Bedeutung. Unter „Menge" wird hier (im Sinne der axiomatischen Methode) nur ein Ding verstanden, von dem man nicht mehr weiß und nicht mehr wissen will, als aus den Postulaten über es folgt. Die Postulate sind so zu formulieren, daß aus ihnen alle erwünschten Sätze der *Cantor*schen Mengenlehre folgen, die Antinomien aber nicht. Das letztere weiß man allerdings bei diesen Axiomatiken nie ganz gewiß. Man sieht nur, daß die bekannten Schlußweisen, die zu ihnen führen, versagen, aber wer weiß, ob es nicht andere gibt? Ein regelrechter Widerspruchsfreiheitsbeweis ist in diesem Zusammenhange offenbar überhaupt undenkbar. Denn die Methode, mit der *Hilbert* die Widerspruchsfreiheit der verschiedenen Geometrien nachwies[7]: Zurückführung auf die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik und Analysis versagt hier. Ein direkter Widerspruchsfreiheitsbeweiß (ohne Verschiebung des Problems) würde aber, da noch vieles in der Logik selbst zu klären bleibt, offenbar in den Bereich der obenerwähnten ersten Gruppe gehören. Die angekündigten Arbeiten von Herrn *Hilbert* haben ihn zum Ziel[8].

---

[5] *Russel-Whitehead*, Principia Mathematica, Cambridge 1910-13; *J. König*, Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre, Leipzig 1914 (posthum); *Brouwer*, Intuitionistische Mengenlehre (Jahresbericht der deutschen Math.-Ver. 28, 1920, S. 203-208); *Weyl*, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik (Math. Zeitschrift 10, 1921, S. 39-79).

[6] *Zermelo*, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I (Math. Analen 65, 1908, S. 261-281, ohne Fortsetzung geblieben); *Fraenkel*, Über den Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms (Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wissenschaften 1922, Math.-Phys. Klasse, S. 253-257); Die Axiome der Mengenlehre (Scripta Univ. atque Bibl. Hierosol., Math. et Phys., Vol. I.); Einleitung in die Mengenlehre, Berlin 1923 (2. Auflage, S. 184 ff.); Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre (Math. Zeitschrift 22, 1924, S. 260-273); *Schönflies*, Zur Axiomatik der Mengenlehre (Math. Annalen 83, 1921, S. 173-200; Bemerkung zur Axiomatik der Größen u. Mengen (ebenda 85, 1922, 60-64).

[7] *Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, Leipzig (mehrere Auflagen seit 1899).

[8] *Hilbert*, Neubegründung der Mathematik I. (Abh. des Math. Seminars der Hamburgschen Univ. 1, 1923, S. 1.57-175); Die logischen Grundlagen der Mathematik (Math. Annalen 88, 1923, S. 151-165).

logico complessivo delle scienze esatte. Si prefiggevano lo scopo di porre l'intera scienza esatta su basi nuove ed evidenti per tutti, tali da potere di nuovo raggiungere ciò che in matematica e in teoria degli insiemi è *giusto*, una volta escluse a priori le contraddizioni generate dalla fondazione immediatamente intuitiva. Qui vanno nominati Russell, König, Weyl, Brouwer,[9] i quali ottennero risultati molto diversi. Ma l'impressione complessiva del loro lavoro è decisamente frustrante. Già in Russell l'intera matematica sembra poggiare sull'altamente problematico *assioma di riducibilità*..[10] Conseguentemente, Weyl e Brouwer rifiutano la maggior parte della matematica come perfettamente insensata. Propriamente parlando, non si ottiene così alcuna riabilitazione della teoria degli insiemi ma solo una critica molto serrata dei modi logico-elementari di inferenza finora utilizzati, in particolare il principio *del terzo escluso,* il *per ogni* e l'*esiste*.

L'altro gruppo, formato da Zermelo, Fraenkel e Schönflies, ha rinunciato a una revisione così radicale.[11] Il metodo logico non è ulteriormente criticato ma conservato. Si interdice solo il concetto ingenuo di insieme, indubbiamente inutilizzabile. Per sostituirlo si applica il metodo assiomatico. In altri termini, si costruisce una serie di postulati dove la parola *insieme* ricorre ma senza significato. Qui, nel senso del metodo assiomatico, con *insieme* si intende solo una cosa (*Ding*) di cui non si sa e non si vuol sapere niente di più di quanto consegue dai postulati, che la concernono. I postulati vanno formulati in modo che ne conseguano tutti i teoremi desiderati della teoria *cantoriana* degli insiemi senza le antinomie. Cosa però, quest'ultima, di cui tali assiomatiche non danno la certezza assoluta. Si sa solo che i metodi di inferenza noti, che porterebbero a esse, falliscono. Ma chi può dire che non ne esistano altri? In questo contesto la regolare dimostrazione di non contraddittorietà è chiaramente impensabile. Infatti, il metodo con cui Hilbert dimostrò la non contraddittorietà di diverse geometrie,[12] riportandole alla non contraddittorietà dell'aritmetica e dell'analisi, qui viene meno. Dato che rimane ancora molto da chiarire nella stessa logica, una dimostrazione diretta (senza spostare il problema) rientrerebbe

---

[9] B. RUSSELL e A.N. WHITEHEAD, *Principia Mathematica*, Cambridge 1910-13;
J. KÖNIG, *Nuovi fondamenti di Logica, Aritmetica e teoria degli insiemi*, Lipsia 1914 (postumo);
L.E.J. BROUWER, *Teoria intuizionista degli insiemi* in *Jahresbericht der deutschen Math.-Ver.* 28, 1920, p. 203-208;
H. WEYL, *Sulla nuova crisi dei fondamenti della matematica* in *Math.Zeitschrift.* 10, 1921, p. 39.

[10] Nella teoria dei tipi l'assioma di riducibilità garantisce che, per ogni funzione proposizionale di qualunque tipo, esista una funzione proposizionale equivalente di tipo zero. [N.d.T.]

[11] E. ZERMELO, *Ricerche sui fondamenti della teoria degli insiemi* I. in *Math. Annalen* 65, 1908, p. 261-281 (rimasto senza continuazione);
A. FRAENKEL, *Sul concetto di* definito *e sull'indipendenza dell'assioma di scelta* in *Sitzungsberichte der Preuß. Akademie der Wissenschaften*, 1922, Math.-Phys. Klasse, p. 253-257;
A. FRAENKEL, *Gli assiomi della teoria degli insiemi* in *Scripta Univ. Bibl.Hierosol.Math.Phys.,* v. I;
A. FRAENKEL, *Introduzione alla teoria degli insiemi* in *Math. Zeitschrift*. 22, 1924, p. 250-273;
A.M. SCHÖNFLIES, *Sull'assiomatica della teoria degli insiemi* in *Math. Annalen* 83, 1921, p. 173;
A.M. SCHÖNFLIES, *Osservazioni sull'assiomatica delle grandezze e degli insiemi*, *ibid.* 85, 1922, p. 60.

[12] D. HILBERT, *Fondamenti della geometria*, Lipsia (più edizioni dal 1899), trad. Feltrinelli, Milano 1967.

Diese zweite Gruppe will also unter peinlicher Vermeidung des naiven (*Cantor*schen) Mengenbegriffes ein Axiomensystem angeben, aus dem die Mengenlehre (ohne ihre Antinomien) folgt. Ihre Untersuchungen können das eigentliche Problem zwar niemals so vollständig erledigen, wie die der ersten Gruppe, aber ihr Ziel ist viel klarer und näherliegend. Es kann zwar niemals auf diesem Wege gezeigt werden, daß die Antinomien wirklich ausgeschaltet sind; auch haftet den Axiomen immer viel Willkür an[13]. Aber eines kann hier sicher erreicht werden: Es wird genau angegeben, was der rehabilitierbare Teil der Mengenlehre ist, und worum es sich handelt, wenn in Zukunft von der vollständigen „formalistischen Mengenlehre“ gesprochen werden wird.
Die vorliegende Arbeit gehört der zweiten Gruppe an. Im folgenden soll ein System von Postulaten angegeben werden, aus dem die ganze bekannte Mengenlehre logisch einwandfrei folgt. Allerdings ist „logisch einwandfrei" in dem Sinne zu verstehen, in dem dies in der Mathematik bisher verstanden wurde. Es wird nicht versucht werden auch im Sinne des *Brouwer-Weyl*schen Intuitionismus einwandfreie Herleitungen zu machen. Ich möchte indessen bemerken, daß auch das ziemlich leicht (mit einigen unbedeutenden Modifikationen) erreichbar wäre, worauf ich aber prinzipiell verzichte: widerspricht doch die axiomatische Methode an sich dem Wesen des Intuitionismus. (Intuitionistisch hätte höchstens ein Axiomensystem einigen Sinn, für das auch der Widerspruchsfreiheitsbeweis intuitionistisch korrekt geführt ist. Nach einer Außerung Brouwers zu schließen nicht einmal das[14]. –

Eine Reihe wesentlicher prinzipieller Fragen werden noch im Teile II behandelt werden, da sie die Kenntnis des Axiomensystems voraussetzen.

§ 2. Allgemeines über die Axiomatik.

Die Aufgabe unserer Axiomatik ist offenbar, alle erwünschten Mengenbildungen durch eine endliche Anzahl rein formaler Operationen (deren Ausführbarkeit eben durch die Postulate garantiert ist) herzustellen. Vermeiden muß man aber die Mengenbildungen durch Zusammenfassung oder Aussonderung von Elementen usw., sowie das bei Zermelo noch auftretende unklare Prinzip der „Definität“.

Wir ziehen aber vor, nicht die „Menge“, sondern die „Funktion“ zu axiomatisieren. Der letztere Begriff umfaßt ja gewiß den ersteren. (Genauer: beide Begriffe sind vollkommen

[13] Eine gewisse Rechtfertigung der Axiome ist es freilich, daß sie, wenn man das axiomatischsinnlose Wort „Menge“ in ihnen im *Cantor*schen Sinne nimmt in evidente Aussagen der naiven Mengenlehre übergehen. Aber was man aus der naiven Mengenlehre fortläßt – und gerade das ist das Wesentliche zum Umgeben der Antinomien - ist unbedingt willkürlich).
[14] *Brouwer*, Intuitionistische Mengenlehre (s. o. S. 220, Fußnote 2). Vgl. *Fraenkel*, Die neuen Ideen zur Grundlegung der Analysis und Mengenlehre (Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver,, 33, 1924, S. 98).

chiaramente nel campo di lavoro del primo gruppo citato. Gli annunciati lavori di Hilbert[15] hanno tale scopo.

Il secondo gruppo, evitando non senza fatica il concetto ingenuo (*cantoriano*) di insieme, ha stabilito un sistema assiomatico da cui segue la teoria degli insiemi senza le corrispondenti antinomie. Le loro ricerche non possono mai risolvere completamente il vero problema, come quelle del primo gruppo, ma il loro scopo è molto più chiaro e prossimo. Per questa strada non si potrà mai mostrare che le antinomie sono messe effettivamente al bando. Inoltre, agli assiomi inerisce sempre troppa arbitrarietà.[16] Ma un risultato si può così sicuramente ottenere: l'esatta definizione della parte riabilitabile della teoria degli insiemi. In futuro, quando si parlerà di teoria degli insiemi completamente *formalizzata*, si saprà di cosa si tratta.

Il presente lavoro appartiene al secondo gruppo. Quanto segue porge un sistema di postulati da cui consegue l'intera teoria degli insiemi nota come priva di obiezioni logiche. In ogni caso l'espressione *priva di obiezioni logiche* va intesa nel senso finora abituale in matematica. Non si tenterà di operare deduzioni non obbiettabili nel senso di Brouwer e Weyl. Vorrei notare in merito che, con alcune modifiche minori, non sarebbe difficile farlo ma per principio vi ho rinunciato. Infatti, in sé, il metodo assiomatico contraddice l'essenza stessa dell'intuizionismo.[17] (Dal punto di vista intuizionista un sistema assiomatico avrebbe tutt'al più senso solo se anche la dimostrazione di non contraddittorietà fosse condotta in modo intuizionisticamente corretto. Secondo Brouwer, poi, non sarebbe conclusivo nemmeno questo).[18]

Nella II parte, presupposta la conoscenza del sistema assiomatico, sarà trattata una serie di questioni di principio.

§ 2. Generalità sull'assiomatica

Chiaramente il compito della nostra assiomatica è di produrre tutte le volute formazioni insiemistiche (*Mengenbildungen*) con un numero finito di operazioni formali, la cui eseguibilità sia garantita proprio dai postulati. Si devono però evitare sia le formazioni insiemistiche, costruite mediante riunione o separazione (*Aussonderung*) di elementi ecc., sia il principio di *definitezza*, ancora poco chiaro in Zermelo.

Noi preferiamo non assiomatizzare gli *insiemi* ma le *funzioni*. Il secondo termine (*Begriff*) comprende di certo il primo. (Più esattamente, i due termini si equivalgono

[15] D. HILBERT, *Nuovi fondamenti della matematica* I. in *Abh. Des Math. Seminars der Hamburgschen Univ.* 1, 1923, p. 157-175;
D. HILBERT, *I fondamenti logici della matematica* in *Math. Annalen* 88, 1923, p. 151-165 (trad. D. HILBERT, *Ricerche sui fondamenti della matematica* a c. V.M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli 1978, p. 215).

[16] Interpretando in senso cantoriano la parola assiomatica e insensata di *insieme*, si convertono gli assiomi in enunciati evidenti della teoria ingenua degli insiemi certamente. Ciò li giustifica. Ma quanto così si tralascia della teoria ingenua - che è essenziale per aggirare le antinomie - è arbitrario.

[17] 5 anni più tardi A. Heyting, allievo di Brouwer, darà la prima assiomatizzazione del calcolo intuizionista. 10 anni dopo, G. Gentzen fornirà la versione in termini di deduzione naturale, che evidenzia la sospensione del principio del terzo escluso. [N.d.T.]

[18] L.E.J. BROUWER, *Teoria intuizionista degli insiemi* (p. 220, n. 2); cfr. anche A. FRAENKEL, *Nuove idee sulla fondazione dell'analisi e della teoria degli insiemi* in *Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver.* 33, 1924, p. 98.

gleichwertig, da die Funktion als Menge von Paaren und die Menge als Funktion mit 2 Werten aufgefaßt werden kann.) Der Grund dieser Abweichung vom gewohnten Vorgehen ist der, daß jede Axiomatißierung der Mengenlehre den Begriff der Funktion benützt (Aussonderungsaxiom, Ersetzungsaxiom, siehe Seite 777777 und 111111), und dabei ist es formal einfacher, den Begriff der Menge auf den der Funktion zu stützen als umgekehrt. – Das anschauliche Bild des axiomatisierten Systems ist das folgende:

Wir betrachten zwei Bereiche von Dingen, den der „Argumente“ und den der „Funktionen“.. (Beide Worte sind natürlich rein formal ohne jede Bedeutung zu verstehen). Die beiden Bereiche sind nicht identisch, indessen überdecken sie sich teilweise. (Es gibt „Argument-Funktionen“, die beiden Bereichen angehören.)

Nun ist in diesen Bereichen eine 2-Variablen-Operation $[x, y]$ definiert (lies „Wert der Funktion x für das Argument y“), deren erste Variable x stets Funktion“ und deren zweite Variable y stets „Argument“ zu sein hat. Durch sie wird stets ein „Argument“ $[x, y]$ gebildet.

Diese Operation $[x, y]$ entspricht einem Verfahren, das in der Mathematik überall anzutreffen ist: aus einer Funktion f (die von ihren Werten $f(x)$; wohl zu unterscheiden isti) und einem Argumente x den Wert $f(x)$ der Funktion f für das Argument x zu bilden. Statt $f(x)$ schreiben wir $[fx]$, um anzudeuten, daß bei diesem Verfahren auch f (ebenso wie x) als Variable zu betrachten ist. Wir ersetzen mit $[xy]$ sozusagen sämtliche 1-Variablen Funktionen durch eine einzige 2-Variablen Funktion. Dabei stehen die Elemente des Bereiches der „Funktionen“ in Analogie zu den (naiv gedachten) Funktionen, die für die „Argumente“ definiert sind und deren Werte „Argumente“ sind. (Als „Mengen“ werden später unter diesen „Funktionen“ x diejenigen ausgezeichnet werden, für die $[x\,y]$ nur 2 gegebene Werte annimmt, wenn y alle „Argumente“ durchläuft; vg. auch § 3 und § 4.)

Für $[x,y]$ gilt übrigens das „Bestimmtheitsaxiom“ im folgenden Sinne:

Wenn a, b „Funktionen“ sind, und für jedes „Argument x $[a\,x] = [b\,x]$ ist, so ist $a = b$. (Siehe Axiom I. 4.)

Eine „Funktion“ a ist also durch ihre „Werte“ $[a\,x]$ ganz eindeutig bestimmt, aber es ist gar niect gesagt, daß man ihr diese „Werte“ beliebig vorschreiben kann. (Damit würden wir ja wieder in die naive Mengenlehre zurückfallen.) Es erhebt sich vielmehr die Frage: welche Operationen sind zur Herstellung von Funktionen vorhanden? Sie wird in den Axiomengruppen II-III. beantwortet.

Es tritt aber noch eine Frage auf: Welche „Funktionen“ sind gleichzeitig „Argumente“?. Offenbar würde es das angenehmste sein, zu antworten: alle. Das würde uns aber bei den in den Axiomengruppen II-III angeführten Herstellungsarten von „Funktionen“ wieder in die Antinomien der naiven Mengenlehre verwickeln: in erster Linie in die *Russell*sche.) Und da wir die genannten Herstellungsmöglichkeiten alle brauchen, so müssen wir auf den Argumentcharakter gewisser Funktionen verzichten.

Diese unvermeidliche Beschränkung erfolgt in der von *Zermelo* gezeigten Richtung:

in quanto una funzione può essere concepita come insieme di coppie e un insieme come funzione a due valori). La deviazione dal modo di procedere abituale è giustificata dal fatto che ogni assiomatizzazione della teoria degli insiemi utilizza il concetto di funzione (assioma di separazione, assioma di sostituzione). Pertanto è formalmente più facile appoggiare il concetto di funzione a quello di insieme che viceversa. Il quadro intuitivo del sistema assiomatizzato è il seguente.

Consideriamo due classi[19] (*Bereiche*) di cose, gli *argomenti* e le *funzioni*. (Naturalmente le due parole vanno intese in modo puramente formale senza attribuire loro alcun significato particolare). Le due classi non sono identiche, benché si ricoprano parzialmente. (Esistono *argomenti-funzioni* che appartengono a entrambe le classi).

Ora, in queste due classi è definita l'operazione a due variabili $[x,y]$ (leggi *valore della funzione x per l'argomento y*), la cui prima variabile deve essere sempre *funzione* e la seconda sempre *argomento*. Risultato dell'operazione è sempre un argomento $[x,y]$.

L'operazione $[x,y]$ corrisponde a un processo ubiquitario in matematica. Data la funzione f (da tenere ben distinta dal suo valore $f(x)$!) e un argomento x, si chiede il valore $f(x)$ della funzione f per l'argomento x. Invece di $f(x)$ scriviamo $[f\,x]$ per significare che in questo processo anche f, oltre a x, va trattata come variabile. Scrivendo $[xy]$ sostituiamo, per così dire, il complesso delle funzioni a una variabile con un'unica funzione a due variabili. Pertanto gli elementi della classe delle *funzioni* stanno in un rapporto di analogia con le funzioni, intese in senso ingenuo, definite per *argomenti* e i cui valori sono *argomenti*. (In seguito tra queste *funzioni x* verranno distinte come *insiemi* quelle per cui $[xy]$ assume solo due valori dati quando y percorre tutti gli argomenti. Cfr. anche §§ 3-4). Del resto per $[x,y]$ vale l'assioma di determinazione (*Bestimmheitsaxiom*) nel senso seguente.

Se a, b sono *funzioni* e per ogni *argomento* x $[ax] = [bx]$, allora $a=b$. (Cfr. ass.I.4).

Una *funzione* è, quindi, del tutto univocamente determinata dai suoi *valori* $[ax]$. Ma non è detto che tali valori si possano prescrivere come si vuole. (Altrimenti ricadremmo nella teoria ingenua degli insiemi). Anzi, si pone la questione di quali operazioni disporre per produrre funzioni. La risposta è nei gruppi di assiomi II e III.

Si presenta allora la seguente questione. Quali *funzioni* sono contemporaneamente *argomenti*? Chiaramente sarebbe bello poter rispondere: tutte. Ma così i modi di produrre funzioni, specificati dai gruppi di assiomi II e III, ci reinvischierebbero nelle antinomie della teoria ingenua degli insiemi, *in primis* quella di Russell. D'altra parte, poiché abbiamo bisogno di tutti i modi noti di produrre *funzioni*, dobbiamo rinunciare al fatto che certe funzioni abbiano carattere di argomento. L'inevitabile restrizione va nella direzione indicata da Zermelo.

[19] Forziamo la traduzione di *Bereich* nel senso di *classe* perché ci sembra giustificata alla luce dell'elaborazione successiva dell'assiomatica nei lavori di Gödel e Bernays. La soluzione, naturalmente, non è perfetta. Ha, tuttavia, il pregio di salvare alcune ambiguità del testo stesso, dovute all'opzione di non trattare insiemi ma funzioni, in attesa di esplicitare la differenza tra insiemi e classi proprie, intendendo i primi come classi che appartengono a classi e le seconde come classi che non appartengono a classi. (Corrispondenti in questa sede a funzioni argomentabili e non argomentabili). [N.d.T.]

Wir wählen willkürlich ein „Argument“ A aus, und erklären im wesentlichen, daß die und nur die Funktionen a gleichzeitig Argumente sind, die *nicht zu oft*, d. h. für zuviele Argumente x von A verschiedene „Werte“ $[a\ x]$ annehmen. (Die „Menge“ wird nämlich als 2-wertige Funktion definiert werden, von der der eine Wort A ist. Also ist das die sinngemäße Übertragung des *Zermelo*schen Standpunktes.)

Dabei präzisieren wir dieses „zu oft“ folgendermaßen:

Die „Funktion“ a wird dann und nur dann nicht „Argument" sein, wenn die Gesamtheit der Argumente x, für die $[a\ x] \neq$ A ist, auf die Gesamtheit aller Argumente überhaupt abgebildet werden kann. (Die Abbildung muß aber durch eine unserer „Funktionen“ erfolgen, d. h. sie muß die Form $y = [b\ y]$ haben. Eindeutig muß sie sein, eindeutig-umkehrbar zu sein braucht sie nicht.) (Siehe Axiom IV. 2.)

Diese Definition hat den Vorteil, daß sie den „Argument“-Charakter aller „Funktionen“ a garantiert, die seltener $\neq A$ sind als eine bereits als „Argument“ erkannte „Funktion“ b. „Seltener“ bedeutet: daß die Gesamtheit aller x, für di $[a\ x] \neq A$ ist, Bild der Gesamtheit aller x, für die $[b\ x] \neq A$ ist, (oder eines Teiles davon) ist. Sie enthält also das sog. Aussonderungsaxiom *Zermelos* und das Ersetzungsaxiom *Fraenkels*[20]. Aber sie leistet mehr: Sie enthält auch den Wohlordnungssatz und macht dadurch das Auswahlprinzip überflüssig.

Daß der Wohlordnungssatz in diesem neuen Zusammenbange auftritt, beruht auf folgendem: Wir können eine einwandfreie Theorie der Ordnungszahlen aufstellen. Die Gesamtheit aller Ordnungszahlen führt „naiv“ zur *Burali-Forti*schen Antinomie: in unserem System hat das die Konsequenz, daß eine Funktion, die für alle Ordnungszahlen Werte $\neq A$ hat, kein Argument ist. Folglich muß die Geßamtheit aller Ordnungszahlen auf die Gesamtheit aller „Argumente“ abgebildet werden können, und das ergibt natürlich eine Wohlordnung für die Gesamtheit aller „Argumente“. (Diese Schlußweise muß und kann natürlich streng durchgeführt werden).

Ich möchte noch bemerken:

Es mag befremdend wirken, daß bei einer Axiomatisierung der Mengenlehre (entgegen den Ausführungen in § 1 Begriffe wie „Gesamtheit“, „Funktion“ naiv benützt werden. Aber das geschieht nur hier im § 2 zur Veranschaulichung des Systems; im § 3, bei der genauen Formulierung wird natürlich nichts derartiges geschehen.

§ 3. Die Axiome und ihre Bedeutung.

Zum Vorhergehenden ist noch folgendes zu bemerken:

Außer der bereits eingeführten universellen 2-Variablen-Operation $[x, y]$

[20] Das „Ersetzungsaxiom“ läßt sich so ausdrücken: M sei eine Menge, $f(x)$ eine (in M definierte) Funktion. Dann gibt es eine Menge N, die alle $f(x)$ für alle Elemente x von M enthält. Diese Axiom stammt von *Fraenkel* (zu den, Grundlagen der *Cantor-Zermelo*schen Mengenlehre; Math. Annalen 86, 1922, S. 230-237). Er wies zuerst darauf hin, daß ohne dieses Axiom in der *Zermelo*schen Axiomatik die Existenz von Mengen der Mächtigkeit $\aleph_\omega$ unbeweisbar ist. (In seinen neueren Arbeiten versucht er, allerdings mit einem schwächeren Axiom auszukommen.) Ich glaube sogar, daß ohne dieses Axiom überhaupt keine Ordnungszahlen-Theorie möglich ist.

Scelto un *argomento A* arbitrario, consideriamo argomenti quelle e solo quelle funzioni che *non troppo spesso,* cioè *non per troppi argomenti x* assumono *valori* [*a,x*] diversi da *A*. (L'*insieme* sarà allora definito come funzione a due valori, dei quali uno è *A*. É questa, dunque, l'interpretazione (*Übertragung*) conforme al punto di vista di Zermelo).

Poi precisiamo *troppo spesso* come segue:

La *funzione a* non è argomento se e solo se la totalità (*Gesamtheit*) degli argomenti *x* per cui [*ax*] ≠ *A* può essere applicata sulla totalità di tutti gli argomenti. (L'applicazione deve però realizzarsi mediante una delle nostre *funzioni*, cioè deve avere la forma *y* = [*bx*]. Deve essere univoca, anche se non necessariamente univocamente invertibile. Cfr. assioma IV.2).

La definizione ha il vantaggio di garantire il carattere di *argomento* a tutte le *funzioni a* che sono ≠ *A* meno spesso di una *funzione b* già riconosciuta come *argomento*. *Meno spesso* significa che la totalità di tutte le *x* per cui [*ax*] ≠ *A* è immagine (*Bild*) del complesso di tutte le *x* per cui [*bx*] ≠ *A* (o di una sua parte). La definizione contiene anche il cosiddetto assioma di separazione di Zermelo e l'assioma di sostituzione di Fraenkel.[21] Ma fa di più. Contiene anche il teorema del buon ordinamento e rende perciò superfluo il principio di scelta (*Auswahlprinzip*).

Che il teorema del buon ordine compaia in questa nuova connessione dipende dalla possibilità di costruire una teoria degli ordinali non obbiettabile. La totalità di tutti i numeri ordinali porta *ingenuamente* all'antinomia di Burali Forti. Nel nostro sistema, di conseguenza, una funzione, che per tutti gli ordinali abbia valore diverso da *A*, non è un argomento. Ne consegue che la totalità di tutti gli ordinali deve potere essere applicata sulla totalità di tutti gli *argomenti.* Si ottiene così in modo naturale un buon ordine di tutti gli *argomenti*. (Naturalmente l'argomentazione deve e può essere rinforzata).

Vorrei ancora notare che può suonare strano che in un'assiomatizzazione della teoria degli insiemi, contrariamente a quanto esposto nel § 1, si utilizzino in modo ingenuo concetti come *totalità e funzione*. Ciò avviene solo in questo § 2 per rendere intuitivo il sistema. Naturalmente, nel § 3 con la formulazione esatta una cosa del genere non si verifica.

§ 3. Gli assiomi e il loro significato

Su quanto precede va ancora notato che, oltre all'operazione universale a due variabili [*x, y*]

[21] L'*assioma di sostituzione* (*Ersetzungsaxiom*) si può formulare così: sia *M* un insieme e *f*(*x*) una funzione definita in *M*. Allora esiste un insieme *N* che contiene tutti i valori *f*(*x*) per tutti gli elementi *x* di *M*. L'assioma proviene da A. FRAENKEL, *Sui fondamenti della teoria degli insiemi di Cantor-Zermelo* in *Math. Annalen* 86, 1922, p. 230-237. Richiama l'attenzione innanzitutto sul fatto che, senza tale assioma, non si può dimostrare, nell'assiomatica di Zermelo, l'esistenza di insiemi di potenza $\aleph_\omega$. (Nei suoi lavori successivi tenta di venirne a capo con un assioma più debole). Arrivo a credere che senza tale assioma non sia possibile alcuna teoria degli ordinali.

müssen wir noch eine 2-Variablen-Operation (x, y) einführen (lies: Paar von x und y), deren Variable x, y beide „Argumente" zu sein haben, und die selbst ein „Argument" (x, y) herstellt. Ihre wichtigste Eigenschaft ist, daß aus $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ folgt (das kommt unter den Axiomen nicht direkt vor, denn es folgt aus den Axiomen II, 3-4). Diese Operation hat gar nicht den fundamentalen Charakter von $[x, y]$; sie ist nur notwendig, weil der Begriff des „Paares" eingeführt werden muß.

Ferner wird von Anfang an außer dem bereits erwähnten „Argumente" A noch ein willkürliches „Argument" B eingeführt werden. (A, B werden nämlich die beiden Werte derjenigen Funktionen sein, die die „Mengen" vertreten.)

Und schließlich werden wir statt von „Argumenten", „Funktionen" und „Argument-Funktionen" stets von „I. Dingen", ‚II. Dingen" und „I. II. Dingen" sprechen.

Das Axiomenßystem lautet so:

Wir beschäftigen uns mit *I. Dingen*, *II. Dingen*, den beiden von einander verschiedenen Dingen A, B, und den beiden Operationen $[x, y]$, (x, y).

Es gelten die Axiomen:

(Einleitende Axiome)

I.l. A, B sind I. Dinge.

2. $[x, y]$ hat dann und nur dann Sinn, wenn x ein II. Ding und y ein I. Ding ist. Es ist selbst stets ein I. Ding.

3. (x, y) hat dann und nur dann einen Sinn, wenn x, y I. Dinge. Es ist selbst stets in I. Ding.

4. a, b seien II. Dinge. Wenn für alle I. Dinge x $[a\, x] = [b\, x]$ ist, so ist $a = b$.

Zu diesen Axiomen ist kein weiterer Kommentar nötig: es war schon von allen im § 2 die Rede.

(Arithmetische Konstruktionsaxiome.)

II.1. Es gibt ein II. Ding a, so daß stets $[a\, x] = x$ ist.

2. u sei ein I. Ding. Es gibt dann ein II. Ding a, so daß stets $[a\, x] = u$ ist.

3. Es gibt ein II. Ding a, so daß stets $[a\, (x\, y)\,] = x$ ist.

4. Es gibt ein II. Ding a, so daß stets $[a\, (x\, y)\,] = y$ ist.

5. Es gibt ein II. Ding a, so daß stets (wenn x I. II. Ding ist) $[a(x\, y)] = [x, y]$ ist.

6. a, b seien II. Dinge. Es gibt dann ein II. Ding c, so daß stets $[c\, x] = ([a\, x], [b\, x])$ ist.

7. a, b seien II. Dinge. Es gibt dann ein II. Ding c, so daß stets $[c\, x] = [a\, [b\, x]]$ ist.

Dies sind alles Herstellungsweisen für Funktionen. Sie sind so zusammengestellt werden, daß die Funktionen in einem gewissen Sinn eine Gruppe bilden. Sie haben nämlich den folgenden Satz zur Folge (auf dessen ganz einfachen Beweis wir nicht eingehen):

già introdotta, ne dobbiamo introdurre ancora un'altra, sempre a due variabili: (x, y) (leggi: coppia di x e y), con variabili x, y che devono essere entrambi *argomenti,* la quale produce un *argomento*, (x, y). La sua proprietà più importante è che da $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ segue $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ (Non lo si esprime con un assioma *ad hoc,* perché deriva dagli assiomi II.3-4). Questa operazione non è così fondamentale come $[x, y]$. È necessaria solo per introdurre il concetto di *coppia.*

Più avanti si introdurrà un nuovo *argomento* arbitrario B, oltre al già citato *argomento* A. (A e B sono i due valori delle funzioni che rappresentano gli insiemi).

In seguito, al posto di *argomenti*, *funzioni* e *argomenti-funzioni* parleremo di I-*cose*, II-*cose* e I.II-*cose*.

Il sistema assiomatico afferma:

Ci occupiamo di I-*cose* e di II-*cose*, delle due cose distinte A e B e delle due operazioni $[x, y]$ e (x, y).

Valgono gli assiomi seguenti:

(Assiomi introduttivi)

I.1. A, B sono I-cose.
2. $[x, y]$ ha senso se e solo se x è una II-cosa e y una I-cosa. $[x\ y]$ è sempre I-cosa.
3. (x, y) ha senso se e solo se x, y sono I-cose. (x, y) è sempre I-cosa.
4. Siano a, b II-cose. Se per tutte le I-cose x $[a\ x] = [b\ x]$, allora $a = b$.

Non occorre commentare ulteriormente tali assiomi, di cui si è già parlato nel § 2.

(Assiomi di costruzione aritmetici)

II.1. Esiste una II-cosa a tale che sempre $[a\ x] = x$.
2. Sia u una I-cosa. Allora esiste una II-cosa a tale che sempre $[a\ x] = u$.
3. Esiste una II-cosa a tale che sempre $[a(xy)] = x$.
4. Esiste una II-cosa a tale che sempre $[a(xy)] = y$.
5. Esiste una II-cosa a tale che sempre $[a(xy)] = [xy]$ (se x è una I.II-cosa).
6. Siano a, b II-cose. Allora esiste una II-cosa c tale che sempre $[cx] = ([ax],[bx])$.
7. Siano a, b II-cose. Allora una II-cosa c tale che sempre $[cx] = [a[bx]]$.

Questi sono tutti i modi di produrre funzioni. Sono stati raccolti in modo che le funzioni formino in un certo senso un gruppo. Infatti, da loro consegue il seguente teorema (di cui omettiamo la facile dimostrazione).

Reduktion. $\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei ein Ausdruck der aus den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und irgendwelchen Konstanten $a_1, a_2, \ldots$ (I. oder II. Dingen) mit Hilfe der Operationen $[x, y]$ und (x, y) aufgebaut ist. Ein solcher Ausdruck braucht, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ I. Dinge sind, nicht immer Sinn zu haben (z. B. $[x_1, x_2]$ nur wenn x_1 ein I. II. Ding ist), aber wenn er Sinn hat, so sei vorausgesetzt, daß er ein I. Ding ist. (Damit wird der Fall ausgeschlossen, daß $\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einfach eine Konstante a ist, die II. Ding aber nicht I. Ding ist.)

Dann gibt es ein II. Ding a, so daß für alle I. Dinge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ für die $\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Sinn hat, $\mathcal{A}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = [a\ ((\ldots((x_1\, x_2)\, x_3)\ldots)\, x_n)]$ ist.

Damit haben wir in $[a\ ((\ldots((x_1\, x_2)\, x_3)\ldots)\, x_n)]$ eine Normalform für die n-Variablen-Ausdrücke gewonnen: es ist die allgemeine n-Variablen Funktion, so wie $[a\, x]$ die allgemeine I-Variablen Funktion ist.

(Logische Konstruktionsaxiome).

III. 1. Es gibt ein II. Ding a, so daß $x = y$ mit $[a\ (x\, y)] \neq$ A gleichbedeutend ist.

2. a sei ein II. Ding. Es gibt dann ein II. Ding b, so daß dann und nur dann $[b\, x] \neq A$ ist, wenn für alle y $[a\ (x\, y)] = A$ ist.

3. a sei ein II. Ding. Es gibt dann ein II. Ding b, so daß immer, wenn für ein einziges y $[a\ (x\, y)] \neq A$ wird, $[b\, x] =$ diesem y ist.

Diese Herstellungsweisen für Funktionen ergänzen diejenigen der Gruppe II. Sie ermöglichen, daß jede logische Bedingung für die I. Dinge $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auf die Normalform $[a\ ((\ldots((x_1\, x_2)\, x_3)\ldots)\, x_n)] \neq A$ gebracht werden könne; und daß jedes I. Ding y, das logisch eindeutig durch $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestimmt ist, auch auf die Normalform $[a\ ((\ldots((x_1\, x_2)\, x_3)\ldots)\, x_n)]$ gebracht werde.

Denn III. 1. ermöglicht das „auf die Normalform bringen" für die Identitätsrelation $x = y$; III. 2. für die Begriffe „alle" und „es gibt". III. 3. erlaubt schließlich die explizite Darstellung $y = [b\, x]$ des durch eine eindeutige implizite Bedingung $[a(x\, y)] \neq A$ bestimmten y.

Übrigens sind die Axiome der Gruppe II. zwar voneinander unabhängig, aber sie sind es nach Hinzunahme der Gruppe III. nicht mehr: So folgt z. B. aus III. I. und III. 3. das Axiom II. 1.

(I. II. Dinge).

IV.1. Es gibt ein II. Ding a, so daß ein I. Ding x dann und nur dann ein I. II. Ding ist, wenn $[a\, x] \neq A$ ist.

2. Ein II. Ding a ist dann und nur dann kein I. II. Ding, wenn es ein II. Ding b gibt, so daß zu jedem I. Dinge x ein y mit $[ay] \neq A$, $[by] = x$ existiert.

Wir haben hier zwei formal analoge Axiome: IV. 1. gibt an, wann ein I. Ding, und IV. 2. wann ein II. Ding I. II. Ding ist. Dem Inhalte nach sind aber IV. I. und IV. 2. grundverschieden.

In IV. 1. hatten wir einfacher verlangen können, daß jedes I. Ding I. II. Ding sei.

Riduzione. Sia $\mathcal{A}(x_1, x_2 \dots x_n)$ un'espressione costruita a partire dalle variabili $x_1, x_2, \dots x_n$ e da certe costanti $a_1, a_2 \dots$ (I o II-cose) mediante le operazioni $[x,y]$ e (x,y). Se $x_1, x_2, \dots x_n$ sono I-cose tale espressione può non avere sempre senso (per esempio $[x_1, x_2]$ ha senso solo quando x_1 è una I.II-cosa). Ma, se ha senso, si presume che sia una I-cosa. (Escludendo così il caso che $\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots x_n)$ sia semplicemente una costante a, che sia II-cosa ma non I-cosa).

Allora esiste una II-cosa a tale che per tutte le I-cose $x_1, x_2, \dots x_n$ per cui ha senso porre $\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots x_n)$ vale

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots x_n) = [a((\dots ((x_1, x_2)\, x_3) \dots)\, x_n)].$$

Con $[a((\dots ((x_1\, x_2)\, x_3) \dots)\, x_n)]$ si dispone, quindi, della forma normale per espressioni a n variabili, così come $[ax]$ è la funzione generale a una variabile.

(Assiomi di costruzione logici)

III.1. Esiste una II-cosa a tale che $x = y$ ha lo stesso significato di $[a(xy)] \neq A$.

2. Sia a una II-cosa. Esiste allora una II-cosa b tale che $[bx] \neq A$ se e solo se $[a(xy)] = A$ per ogni y.

3. Sia a una II-cosa. Esiste allora una II-cosa b tale che sempre, se per una y $[a(xy)] \neq A$, allora $[bx]$ = questa stessa y.

Questi modi di costruire funzioni completano quelli del II gruppo. Consentono di riportare qualsiasi condizione logica per I-cose $x_1, x_2 \dots x_n$ alla forma normale $[a((\dots ((x_1, x_2)\, x_3) \dots)\, x_n)] \neq A$; e di riportare ogni I-cosa y, determinata logicamente da $x_1, x_2 \dots x_n$, alla forma normale $[a((\dots ((x_1, x_2)\, x_3) \dots)\, x_n)]$. Infatti, III.1 rende possibile riportare a forma normale la relazione di identità $x = y$; III.2 i concetti *per ogni* ed *esiste*; infine III.3 consente la rappresentazione esplicita $y = [bx]$ di y determinato dalla relazione univoca implicita $[a(x\, y)] \neq A$.

Inoltre, gli assiomi del II gruppo sono indipendenti tra di loro ma, dopo l'introduzione di quelli del terzo gruppo, non lo sono più. Infatti, per es., da III.1 e III.3 segue l'assioma II.1.

(I.II-cose)

IV.1. Esiste una II-cosa a tale che una I-cosa x è I.II-cosa se e solo se $[ax] \neq$ A.

2. Una II-cosa a non è una I.II-cosa se e solo se esiste una II-cosa b tale che per ogni I-cosa x esiste una y con $[a\, y] \neq A$ e $[by] = x$..

Abbiamo qui due assiomi formalmente analoghi: IV.1 stabilisce quando una I-cosa è una I.II-cosa e IV.2 stabilisce quando una II-cosa è una I.II-cosa. Quanto a contenuto, però, IV.1 e IV.2 sono fondamentalmente diversi.

In IV.1 avremmo più semplicemente potuto richiedere che ogni I-cosa fosse anche I.II-cosa.

(D. h. daß alle betrachteten Dinge Funktionen sind. *Zermelo* macht keine solche Einschränkung wohl aber *Fraenkel*; davon wird noch im Teile II. die Rede sein.) Wir halten aber zunächst die Axiome möglichst allgemein; auf diese und weitere Restriktionen geben wir noch im Teile II. ein. IV. 1,. verlangt aber nichts Meritorisches, nur daß die Eigenschaft des I. Dinges „I. II. Ding zu sein", wie jede andere Eigenschaft, auf die Normalform gebracht werden könne.

Demgegenüber ist IV. 2. ein sehr wesentliches und folgenreiches Axiom. Es war von ihm schon in § 2. die Rede; aus ihm folgen das Aussonderungsaxiom *Zermelo*s, das Ersetzungsaxiom *Fraenkel*s und der Wohlordnungssatz. Bei *Zermelo* und *Fraenkel* wird kein solches allgemeines Kriterium zur Entscheidung dessen, wann eine Menge „zu groß" ist, benützt. Auch wird, von ihnen abweichend, der Wohlordnungssatz hieraus und nicht aus dem Auswahlprinzip (Multiplikationsaxiom bei *Zermelo*) gewonnen.

Für die folgende Gruppe von Axiomen ist es praktisch (aber keineswegs notwendig) die folgenden Zeichen zu definieren:

a sei ein II. Ding. Für $[a\ x] \neq A$ schreiben wir auch $x \in a$.

a, b seien II. Dinge. Wenn aus $x \in a$ $x \in b$ folgt, so ist $a \leq b$. Für $b \leq a$ schreiben wir auch $a \geq b$.

Wenn $a \leq b$ und $a \geq b$ ist so schreiben wir $a \approx b$. Wenn $a \leq b$, aber nicht $a \geq b$ ist so schreiben wir $a < b$; wenn nicht $a \leq b$, aber $a \geq b$, so schreiben wir $a > b$. (Vgl. auch § 4.)

(Unendlichkeitsaxiome)

V. 1. Es gibt ein I. II. Ding a mit den folgenden Eigenschaften:

Es gibt I. II. Dinge x mit $x \in a$. Wenn für ein I. II. Ding x $x \in a$ ist, so gibt es I. II. Dinge $y \in a$, für die $x < y$ ist.

2. a sei ein I. II. Ding. Es gibt dann ein I. II. Ding b, für welches aus $x \in y$, $y \in a$ (y also I. II. Ding.) $x \in b$ folgt.

3. a sei ein I. II. Ding. Es gibt dann ein I. II. Ding b mit der folgenden Eigenschaft:

Wenn für ein I. 1 I. Ding x $x < a$ ist, so gibt es ein I. II. Ding y, für welches $x \approx y$, $y \in b$ ist.

Diese drei verhältnismäßig komplizierten Axiomen treten bei *Zermelo* und *Fraenkel* auch auf und zwar als „Axiom des Unendlichen" (V. l.), „der Vereinigung" (V. 2.), und „der Potenzmenge" (V. 3.). Wir nennen aber alle drei Unendlichkeitsaxiome, weil sie nur bei der spezifischen Theorie der unendlichen Mächtigkeiten notwendig sind. Nicht nur die Theorie der endlichen Mengen und Ordnungszahlen (d. h. der nichtnegativen ganzen Zahlen) sondern sogar teilweise die des Kontinuums können ohne sie, allein auf Grund der Axiome der Gruppen I.-IV. aufgebaut werden.

Es sind Herstellungsweisen für I. II. Dinge (analog zu den Gruppen II. III., die es für II. Dinge waren). Ihr Sinn ist (naiv formuliert) ungefähr der folgende:

Es gibt eine nicht zu große unendliche Menge a. Wenn a eine nicht zu große Menge nicht zu großer Mengen ist, so ist auch die Menge b der Elemente der Elemente von a nicht zu groß.

(Ciò significa che, ogni cosa trattata è una funzione. Zermelo non pone tale limitazione (*Einschränkung*), Fraenkel invece sì. Se ne riparlerà ancora nella II parte). Per ora manteniamo l'assioma nella forma più generale possibile. Di questa e ulteriori restrizioni ci occuperemo nella II parte. Tuttavia, IV.1 non richiede nulla di particolarmente meritorio ma solo che la proprietà della I-cosa di *essere* I.II-*cosa* può, come ogni altra proprietà, essere tradotta in forma normale.

Per contro IV.2 è un assioma essenziale e ricco di conseguenze. Se ne era già parlato nel § 2. Da esso derivano l'assioma di separazione di Zermelo, l'assioma di sostituzione di Fraenkel e il teorema del buon ordine. Zermelo e Fraenkel non utilizzano un criterio così generale per decidere quando un insieme è *troppo grande*. Si ottiene anche il teorema del buon ordine, da loro indebolito, senza dedurlo dal principio di scelta (assioma di moltiplicazione di Zermelo).

Per il seguente gruppo di assiomi è pratico (ma assolutamente non necessario) definire i seguenti segni:

Sia a una II-cosa. Al posto di $[a\ x] \neq A$ scriviamo anche $x \in$[22] a.

Siano a, b II-cose. Se da $x \in a$ segue $x \in b$ allora vale $a \subseteq$[23] b. Al posto di $b \subseteq a$ scriviamo anche $a \supseteq b$.

Se $a \subseteq b$ e $a \supseteq b$, scriviamo $a \sim b$. Se non vale $a \subseteq b$ ma $a \supseteq b$, scriviamo $a \supset$[24] b (v. § 4).

(Assiomi dell'infinito)

V.1. Esiste una I.II-cosa a con le seguenti proprietà: esiste una I.II-cosa x tale che $x \in a$.. Se per una I.II-cosa x vale $x \in a$, allora esiste una I.II-cosa $y \in a$ per cui vale $x \subset y$.

2. Sia a una I.II-cosa. Allora esiste una I.II-cosa b per cui da $x \in y$ e da $y \in a$ (con y I.II-cosa) segue $x \in b$.

3. Sia a una I.II-cosa. Allora esiste una I.II-cosa b con la seguente proprietà: se per una I.II-cosa x vale $x \subseteq a$, allora esiste una I.II-cosa y per cui $x \sim y$, $y \in b$..

Questi tre assiomi, relativamente complicati, compaiono anche in Zermelo e Fraenkel, rispettivamente come *assioma dell'infinito* (V.1), *assioma dell'unione* (V.2) e *assioma dell'insieme potenza* (V.3). Noi, però, li chiamiamo tutti e tre assiomi dell'infinito perché sono necessari solo nella specifica teoria delle potenze infinite. Non solo la teoria degli insiemi e degli ordinali finiti (cioè i numeri interi non negativi) ma anche parzialmente quella del continuo può essere costruita solo sulla base degli assiomi dei gruppi I-IV.

Si tratta di modalità di costruzione di I.II-cose analoghe a quelle previste dai gruppi II e III per le II-cose. Il loro senso (formulato in modo ingenuo) è pressappoco il seguente:

Esiste un insieme infinito non troppo grande a.

Se un insieme non troppo grande a non è formato da insiemi troppo grandi, anche l'insieme b degli elementi degli elementi di a non è troppo grande.

---

[22] La notazione originale di von Neumann è ε. Noi usiamo la notazione corrente. (N.d.T.)

[23] La notazione originale di von Neumann è un assemblaggio di < e ~. Noi usiamo la notazione corrente. (N.d.T.)

[24] La notazione originale di von Neumann è <. Noi usiamo la notazione corrente. (N.d.T.)

Wenn *a* eine nicht zu große Menge ist, so ist auch die Menge *b* aller Teilmengen von *a* nicht zu groß.

Freilich wird die Formulierung dadurch, daß nicht von Mengen, sondern von Funktionen gesprochen wird, etwas kompliziert (besonders V. 3.); immerhin folgt mit Hilfe der Axiome der Gruppe V. leicht (sobald der Begriff „Menge“ als Spezialfall von „Funktion“ streng definiert ist) die Existenz unendlicher Mengen, sowie die der Vereinigungs- und Potenzmengen. Das Axiom V. 1. weicht übrigens von der Fassung von *Zermelo* (und *Fraenkel*) für die Unendlichkeit ab: Es wird in ihm die Existenz irgendeiner unendlichen Menge verlangt und nicht die einer speziellen, wie dort. Dieser Umstand ist aber belanglos.

Diese Axiome der Gruppen I.-V. bilden unser Axiomensystem. Die Gruppierung und Formulierung weicht äußerlich von *Zermelo* und *Fraenkel* weitgehend ab; trotzdem sind viele Analogien vorhanden. Besonders beim Vergleiche mit den *Fraenkel*schen Axiomen und Definitionen sieht man, daß die meisten unserer Axiome Analoga bei ihm haben. Indessen sind ganz wesentliche Unterschiede auch vorhanden. Daß von „Funktionen“ statt von „Mengen“ geredet wird, ist wohl oberflächlich; wesentlich aber ist, daß auch „zu große“ Mengen (bzw. „Funktionen“) Gegenstand dieser Mengenlehre sind, nämlich diejenigen II. Dinge, die keine I. II. Dinge sind. Anstatt aie gänzlich zu verbieten, werden sie nur für unfähig erklärt Argumente zu sein (sie sind keine I. Dinge!). Zum Vermeiden der Antinomien reicht das aus und ihre Existenz ist für gewisse Schlußweisen notwendig. Ganz wesentlich von *Zermelo* und *Fraenkel* abweichend, ja direkt für unsere Axiomatik charakteristisch ist schließlich das Axiom IV. 2. Zwar steht es in einer gewissen Beziehung zum Aussonderungs- und zum Ersetzungsaxiom, aber es ist viel weitergehend. Einerseits garantiert es die Existenz der Teilmengen und Bildmengen, und ermöglicht überhaupt die Theorie der Ordnungszahlen und Alephs (die in einem Axiomensystem, in dem das Ersetzungsaxiom fehlt, kaum gelingen kann), doch das ist im wesentlichen nur die Leistung des Ersetzungsaxioms. Aber darüber hinausgehend nimmt es eine ganz zentrale Stellung im Axiomensystem ein; es ermöglicht in mehreren Fällen den Nachweis dafür, daß eine Menge „nicht zu groß“ ist, und schließlich ergibt es den Wohlordnungssatz.

Freilich verlangt dieses Axiom IV. 2. etwas mehr als bisher für den Begriff „nicht zu groß“ für selbßtverständlich und billig erachtet wurde. Man könnte sagen, daß es dem Bogen etwas überspannt. Aber bei der Verworrenheit des landläufigen Begriffes, „nicht zu groß“ einerseits und bei der außergewöhnlichen Leistungsfähigkeit dieses Axioms andererseits glaube ich mit seiner Einführung keinen zu krassen Willkürakt begangen zu haben. Umso mehr, als es den Bereich der Mengenlehre eher erweitert als einschränkt, und trotzdem kaum eine Quelle von Antinomien werden kann. (Auf diesen letzten Punkt gehen wir im Teile II. näher ein.)

§ 4. Über die Herleitung der Mengenlehre.

In den §§ 2-3 wurde eine Axiomatisierung der Mengenlehre beschrieben, unter Hervorhebung der prinzipiellen Gesichtspunkte, die bei ihrer Aufstellung maßgebend waren. Im folgenden soll einiges über die Herleitung der Mengenlehre aus diesen Axiomen gesagt werden. Eine solche Herleitung der Mengenlehre würde sich folgendermaßen gliedern:

Se *a* non è un insieme troppo grande, anche l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi non è troppo grande.

Chiaramente la formulazione si complica un po' per il fatto di non parlare di insiemi ma di funzioni (in particolare V.3). Tuttavia, appena il concetto di *insieme* è definito rigorosamente come caso particolare di *funzione*, con l'aiuto degli assiomi del gruppo V, segue facilmente l'esistenza di insiemi infiniti, dell'insieme unione e dell'insieme potenza. Del resto l'assioma V.1 si distacca dalla concezione di infinitezza di Zermelo e Fraenkel. Richiede l'esistenza di un insieme infinito qualsiasi, non di un insieme speciale come pretendono quegli autori. La circostanza, però, è irrilevante.

Gli assiomi dei gruppi I-V formano il nostro sistema assiomatico. Dall'esterno, raggruppamento e formulazione divergono ampiamente da Zermelo e Fraenkel. Ciononostante presentano molte analogie. In particolare, confrontando gli assiomi e definizioni di Fraenkel, si vede che la maggior parte dei nostri assiomi hanno degli analoghi. Per contro sono presenti anche differenze affatto essenziali. Che si parli di *funzioni* invece che di *insiemi* è del tutto superficiale. Essenziale è, invece, che oggetto di questa teoria siano anche *insiemi* (rispettivamente *funzioni*) *troppo grandi*, precisamente le II-cose che non sono I.II-cose. Invece di vietarle interamente, diventano semplicemente inadatte a essere dichiarate argomenti (non sono I-cose!). Tanto basta a evitare le antinomie mentre la loro esistenza è necessaria per concludere certe dimostrazioni.

In conclusione, l'assioma IV.2 è essenzialmente differente da Zermelo e Fraenkel e caratterizza direttamente la nostra assiomatica. Esso sta in un certo rapporto con l'assioma di separazione e con l'assioma di sostituzione ma va molto più in là. Da una parte garantisce l'esistenza di sottoinsiemi e insiemi immagine e rende possibile soprattutto la teoria degli ordinali e degli *aleph*, che in un sistema assiomatico carente dell'assioma di sostituzione difficilmente si riesce a fare, essendo essenzialmente il portato dell'assioma di sostituzione. Ma, procedendo oltre, occupa un posto affatto centrale nel sistema di assiomi in quanto in molti casi rende possibile dimostrare che un insieme non è *troppo grande* e, in conclusione, porge il teorema del buon ordine.

Chiaramente l'assioma IV.2 pretende qualcosa di più di quanto finora considerato evidente e conveniente per il concetto di *non troppo grande*. Si potrebbe dire che tende un po' troppo la corda. Ma, date da una parte la confusione del termine corrente *non troppo grande* e dall'altra la capacità di questo assioma di prestazioni eccezionali, credo di non aver commesso, introducendolo, un atto eccessivamente arbitrario. Tanto più che allarga il campo della teoria degli insiemi, invece di restringerlo, e ciononostante non è praticamente fonte di antinomie. (Approfondiremo questo punto nella seconda parte).

§ 4. Sulla deduzione della teoria degli insiemi

Nei §§ 2-3 è stata descritta un'assiomatizzazione della teoria degli insiemi, dando rilievo ai punti di vista principali decisivi per la sua costruzione. In quanto segue diremo qualcosa sulla deduzione della teoria degli insiemi a partire da questi assiomi.

Tale deduzione potrebbe essere articolata come segue.

1. Allgemeine Mengenlehre.

Hier sind diejenigen allgemeinen Sätze und Definitionen zu erledigen, die mehr aus dem Wesen der Axiomatik als dem der Mengenlehre fließen, solche, die in der naiven Mengenlehre ganz trivial sind. Es sind Sätze wie die Existenz der Vereinigungsmenge und des Durchschnittes von Mengen, die Existenz der Potenzmenge usw. Es ist hier weder von Ordnung noch von Mächtigkeiten die Rede.

2. Ordnung und Wohlordnung.

Es wird definiert, was unter diesen Begriffen, ferner unter gewissen Hilfsbegriffen, wie Ähnlichkeit, Abschnitt (Anfangsstück) usw. zu verstehen ist. Einige ganz triviale Sätze über Ordnung und Wohlordnung folgen, z. B.: Sind zwei geordnete Mengen einer dritten ähnlich, so sind sie auch einander ähnlich; ist von zwei ähnlichen geordneten Mengen die eine wohlgeordnet, so ist auch es die andere; usw.

3. Ordnungszahlen.

Hier fängt die eigentliche Theorie an. Eine strenge Definition der Ordnungszahlen wird angegeben und anschließend werden die wichtigsten Eigenschaften dieser Ordnungszahlen entwickelt; u. a. die Vergleichbarkeit der wohlgeordneten Mengen und die Zulässigkeit der Definition durch transfinite Induktion[25].

4. Wohlordnungssatz.

Mit Hilfe der Ordnungszahlen und des Axiomes IV. 2. wird (ohne Auswahlprinzip) der Wohlordnungssatz bewiesen.

5. Mächtigkeiten.

Nachdem die Theorie der Ordnungszahlen und der Wohlordnungssatz vorliegen, kann auch die Theorie der Alephs (Kardinalzahlen oder Mächtigkeiten) leicht entwickelt werden. (Diese Gruppierung der Mächtigkeiten erst nach der Wohlordnung ist von der allgemein üblichen abweichend. Sie führt aber schneller zum Ziele.)

6. Unendlichkeit.

Schließlich folgt die Definition der Endlichkeit und Unendlichkeit von Mengen. Die einfachsten Eigenschaften von Endlichkeit und Unendlichkeit werden entwickelt und die Existenz unendlicher Mengen nachgewiesen. Die kleinste Unendliche Ordnungszahl ω wird definiert.

Wir wollen im folgenden diese (bereits fertig vorliegende) Herleitung nicht durchführen. Sie würde mit allen Beweisen sehr viel Raum einnehmen und den Rahmen dieser Darstellung übersteigen. Sie soll in einer anderen Arbeit detailliert auseinandergesetzt werden.

---

[25] Vgl. *J. Neumann*, Zur Einführung der transfiniten Ordnungszahlen. (Acta Litterarum ac Scientiarum regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae. Sectio Scient. Math. Tom. I Fasc. IV, 1923. S. 199-208.) Szeged.

1. Teoria generale degli insiemi

Rientrano qui i teoremi generali e le definizioni che dipendono dall'essenza dell'assiomatica più della restante teoria degli insiemi, enunciati che nella teoria ingenua sono affatto banali. Si tratta di teoremi come l'esistenza dell'insieme unione e intersezione di insiemi, l'esistenza dell'insieme potenza ecc. A questo livello non si parla né di potenza né di ordine.

2. Ordine e buon ordine

Si definisce cosa si intende con questi termini e, successivamente, con termini di servizio come similitudine, sezione (tratto iniziale), ecc. Seguono teoremi banali sull'ordine e il buon ordine. Per es., due insiemi simili a un terzo sono simili tra di loro; dati due insiemi ordinati simili, se uno è ben ordinato, anche l'altro lo è; ecc.

3. Numeri ordinali

Qui comincia la vera teoria. Si dà una definizione forte di numeri ordinali e si sviluppano in seguito le loro più importanti proprietà; tra l'altro, la confrontabilità degli insiemi ben ordinati e l'ammissibilità della definizione tramite l'induzione transfinita.[26]

4. Teorema del buon ordine

Con l'aiuto degli ordinali e dell'assioma IV.2 si dimostra il teorema del buon ordine senza ricorrere al principio di scelta.

5. Potenze

Poiché esistono le teorie degli ordinali e del buon ordine, si può sviluppare la teoria degli aleph (numeri cardinali o potenze). (Raggruppare le potenze solo dopo il buon ordine rappresenta una deviazione dall'uso generale ma arriva allo scopo più velocemente).

6. Infinitezza

Da ultimo segue la definizione di insiemi finiti e infiniti. Si sviluppano le più semplici proprietà di finito e infinito e si dimostra l'esistenza di insiemi infiniti. Si definisce il più piccolo ordinale ω.

In seguito non vogliamo realizzare questa deduzione, già completamente esistente. Tutte le dimostrazioni richiederebbero molto spazio ed esulerebbero dal quadro di questa presentazione. Andrà dettagliatamente articolata in un altro lavoro.

Qui vengono riportate le indicazioni più importanti.

[26] Cfr. J. NEUMANN, *Introduzione ai numeri ordinali transfiniti.* (*Acta Litterarum ac Scientiarum regiae Univ. Hungaricae Francisco-Josephine.* Sectio Scient. Math. Tom. I-Fasc. IV, 1923, p. 199).

Hier seien nur die wichtigsten Bezeichnungen angeführt.

Die genaue Definition von „Menge“ (als Spezialfall von „Funktion“) lautet so:

Ein II. Ding a heißt ein Bereich, wenn stets $[a\ x] = A$ oder $= B$ ist.

Ein I. II. Ding heißt in diesem Falle eine *Menge*.

D. h. „Menge“ heißen (in der früheren Terminologie) die „nicht zu großen“ Mengen, und „Bereiche“ sind alle Gesamtheiten ohne Rücksicht auf ihre „Größe“. Ein Bereich ist dann und nur dann „argumentfähig“ (d. h. I. II. Ding), wenn er Menge ist.

Die Definitionen der Relationen $x \in a$ (x gehört zu a, x ist Element von a, a enthält x), $a \leq b$ (a ist Teil von b), $a < b$ (a ist echter Teil von b), $a \approx b$ (a, b sind gleich groß) sind schon im § 3 angegeben worden. (Wenn a und b Bereiche sind, so folgt aus $a \approx b$ wegen I. 4 natürlich $a = b$; für allgemeine II. Dinge ist diese Folgerung hingegen nicht notwendig.

Wenn a, b Bereiche sind, so sind $a+b$, $a.b$, $a-b$ deren Summen-, Durchschnitts-, bzw. Differenzbereiche (in demselben Sinne, wie dies in der naiven Mengenlehre verstanden wird; natürlich müssen für alle diese Bereiche zuerst die Existenzbeweise gebracht werden; das gilt auch im folgenden). Wenn a ein Bereich ist und seine Elemente Mengen sind, so sind $S(a)$, $D(a)$ der Vereinigungs-, bzw. Durchschnittsbereich (der Elemente) von a. Ist a ein Bereich und c ein II. Ding, so ist $\|[c, a]\|$ das durch c vermittelte Bild von a. Ist schließlich a ein Bereich, so ist $P(a)$ der Potenzbereich von a (der alle Teilmengen von a enthält; Bereiche die keine Mengen sind, sind ja „argumentunfähig“). Übrigens ist, wenn a, b Mengen sind, auch $a+b$ eine Menge, wenn a oder b eine Menge ist, auch $a-b$ eine Menge, und wenn a eine Menge ist, auch $S(a)$, $D(a)$, $P(a)$ Mengen.

Wenn a ein Bereich ist, so nennen wir alle Bereiche b *Ordnungen* von a, die die folgende Eigenschaft haben:

Jedes x Element von b hat die Form $x = (uv)$, $u \in a$, $v \in a$, $u \neq v$.

Wenn u, v zwei voneinander verschiedene Elemente von a sind, so gehört (uv) oder (vu) zu a.

Wenn (uv), (vw) zu b gehören, so gehört auch (uw) zu b.

Wenn (uv) zu b gehört, so schreiben wir auch $u \overset{(b)}{<} v$ oder $v \overset{(b)}{>} u$ (u liegt bei der Ordnung b vor v, v liegt bei der Ordnung b nach u).

Wenn a sogar eine Menge ist, so sind alle seine Ordnungen Mengen und sie bilden auch eine Menge $O(a)$.

Die übrigen Definitionen (Ähnlichkeit, Wohlordnung, Ordnungszahl, Mächtigkeit, Äquivalenz, Endlichkeit und Unendlichkeit) führen wir hier nicht mehr an, sie liegen teilweise auf der Hand. Die Theorie der Ordnungszahlen, die hier in Frage kommt, habe ich bereits in einer anderen Arbeit auseinandergesetzt (siehe Fußnote auf S. 228). (Allerdings in der Terminologie der naiven Mengenlehre; aber die „Übertragung in diese Axiomatik bereitet weiter keine Schwierigkeiten.)

II. Untersuchung der Axiome.

§ 1. Die Fragestellung, Prinzipielles.

Aus den Axiomen, wie sie im Teile I. auseinandergesetzt wurden, folgen die bekannten Sätze der Mengenlehre restlos; andererseits sind aber diese Axiome (insofern sie nicht

L'esatta definizione di *insieme*, come caso speciale di *funzione*, è:
Una II-cosa a è una *classe* se è sempre $[a\ x] = A$ o $= B$.
In questo caso una I.II-cosa si chiama *insieme.*

In altri termini, nella vecchia terminologia, gli *insiemi* sono insiemi *non troppo grandi* mentre le *classi* (*Bereiche*) sono tutte le totalità (*Gesamheit*), indipendentemente dalla loro *grandezza*. Una classe è *argomentabile* (*argumentfähig*) (cioè, è una I.II-cosa) se e solo se è un insieme.

Le definizioni della relazione $x \in a$ (x appartiene ad a, x è elemento di a, a contiene x), $a \subseteq b$ (a è parte di b), $a \subset b$ (a è parte propria di b), $a \sim b$ (a e b hanno la stessa estensione) sono state già date nel § 3. (Se a e b sono classi, da $a \sim b$ segue, per I.4, $a = b$; la conseguenza non vale necessariamente per II-cose generali).

Se a e b sono classi, $a+b$, $a.b$, $a\text{-}b$ sono rispettivamente le classi somma, intersezione e differenza di classi (nello stesso senso della teoria ingenua degli insiemi; naturalmente, per ognuno di queste classi occorre dimostrare l'esistenza; ciò vale anche in seguito).
Se a è una classe e i suoi elementi sono insiemi, allora $S(a)$, $D(a)$ sono rispettivamente le classi unione e intersezione degli elementi di a. Se a è una classe e c una II-cosa, allora $\|[c\ a]\|$ è l'immagine di a tramite c. Sia, infine, a una classe. Allora $P(a)$ è la classe potenza di a (la quale contiene tutti i *sottoinsiemi* di a; classi che non sono insiemi non sono argomentabili (*argumentunfähig*)). Inoltre, se a e b sono insiemi, anche $a+b$ è un insieme; se a o b sono insiemi, anche $a.b$ è un insieme; se a è un insieme, anche $S(a)$, $D(a)$ e $P(a)$ sono insiemi.

Se a è una classe, chiamiamo *ordini* di a tutte le classi b con le seguenti proprietà:

Ogni elemento x di b ha la forma $x = (u\ v)$ con $u \in a$, $v \in a$, $u \neq v$. Se u, v sono due elementi distinti di a, allora $(u\ v)$ o $(v\ u)$ appartiene a b.

Se $(u\ v)$, $(v\ w)$ appartengono a b, allora anche $(u\ w)$ appartiene a b.

Se $(u\ v)$ appartiene a b, si scrive $u <_b v$ oppure $v >_b u$ (nell'ordine b, u viene prima di v, v viene dopo di u).

Se a è un insieme, tutti i suoi ordini sono insiemi e formano l'insieme $O(a)$.

Le restanti definizioni (similitudine, buon ordine, numero ordinale, potenza, equivalenza, finitezza e infinitezza) non vengono qui riportate in quanto parzialmente evidenti. La teoria dei numeri ordinali, qui richiamata, è stata da me affrontata in un precedente lavoro (vedi nota precedente), tra l'altro, nella terminologia della teoria ingenua degli insiemi; ma la trasposizione in questa assiomatica non presenta alcuna difficoltà.

II. Esame degli assiomi

§ 1. Formulazione della questione. Principi

einschränkender Art sind) nichts als triviale Tatsachen der naiven Mengenlehre. In diesem Sinne könnten wir also sagen, daß durch unsere Axiome weder zuviel noch zu wenig gefordert wurde.

Indessen wäre eine solche Feststellung aus mehreren Gründen nicht stichhaltig. Der erste Grund ist der folgende:

Unsere Axiome ermöglichen zwar die bekannten Mengenbildungen $a+b$, $S(a)$, $P(\mathrm{a})$, $|[c,a]|$ und die „Aussonderung" (wobei die endlichen und die abzählbaren Mengen den Ausgangspunkt bilden), aber sie garantieren nicht, daß es außer den so gewonnenen Mengen nicht noch weitere gibt, die auf diesem Wege unerreichbar sind. Es könnten a priori auch sehr gut Mengen von dieser Art existieren. Z. B. wenn eine Menge *a* ein einziges Element hat und. dieses sie selbst ist: $\mathrm{a} = (\mathrm{a})$; oder eine „absteigende Mengenfolge": $\mathrm{a}_1 = (\mathrm{a}_2)$, $\mathrm{a}_2 = (\mathrm{a}_3)$, ... ((a) bedeutet die Menge mit dem einzigen Elemente *a*[27]). Es wäre nun erwünscht, alle diese überflüssigen Mengenbildungen zu beseitigen, und das leisten unsere bisherigen Axiome sicherlich nicht.

Um diese Lücke zufüllen, hält *Fraenkel* die Einführung eines weiteren, noch nicht genau formulierten Axioms für wünschenswert (Beschränktheitsaxiom), zu dem unsere Axiome kein Analogon bieten und das etwa so lauten würde:

Außer den Mengen (bezw. I. und II. Dingen), die auf Grund der Axiome unbedingt existieren müssen, gibt es keine weiteren Mengen.

Wir wollen dieses Axiom in unserem Formalismus präzis fassen. Hierzu definieren wir:

Das System der I. und II. Dinge sei Σ. Σ' sei ein Teilsystem von Σ. $\mathrm{I}_{\Sigma'}$ oder $\mathrm{II}_{\Sigma'}$ Dinge seien alle I. bzw. II. Dinge aus Σ'. $[x, y]_{\Sigma'}$, (x ein $\mathrm{I}_{\Sigma'}$, y ein $\mathrm{II}_{\Sigma'}$ Ding) bedeute $[x, y]$, $(x, y)_{\Sigma'}$ (x, y $\mathrm{I}_{\Sigma'}$ Dinge) bedeute (x, y), $A_{\Sigma'}$ sei A, $B_{\Sigma'}$ sei B.

Wenn nun diese $\mathrm{I}_{\Sigma'}$, $\mathrm{II}_{\Sigma'}$ Dinge, die Operationen $[x, y]_{\Sigma'}$, $(x, y)_{\Sigma'}$, und die Dinge $A_{\Sigma'}$, $B_{\Sigma'}$, unseren Axiomen auch genügen, so sagen wir kurz, daß Σ' unseren Axiomen genügt.

Das erwähnte Beschränktheitsaxiom verlangt nun einfach: Außer Σ selbst soll kein anderes Teilsystem Σ' von Σ den Axiomen I.-V. genügen.

In dießer Formulierung wird es nun klar, daß gegen ein derartiges Axiom (das gilt natürlich ebenso in dem *Fraenkel*schen Systeme) sofort zwei ernste Einwände geltend gemacht werden können.

Erstens ist dieses Axiom von einem ganz anderen Typus als die früheren, da es im Gegensatze zum bisherigen Prinzip die naiv mengentheoretischen Begriffsbildungen nicht vermeidet. Denn was sollen wir unter „Teilsystemen" von Σ verstehen? Mengen oder Bereiche im Sinne der früheren Axiome keinesfalls, denn die können nur I. Dinge als Elemente haben, während Σ' und Σ I. und II. Dinge enthalten. Waß bleibt aber dann übrig, da doch der naive Mengenbegriff streng verboten sein sollte? Solch ein Axiom würde das

[27] *Mirimanoff*, Les Antinomies de *Russell* et *Burali-Forti* (L'Enseignement Mathématique XIX année 1917, Seite 42).

Dagli assiomi esposti nella prima parte discendono tutti i teoremi noti della teoria degli insiemi. D'altra parte questi stessi assiomi, nella misura in cui non sono di tipo restrittivo, non sono altro che banalità della teoria ingenua degli insiemi. In questo senso potremmo anche dire che non richiedono né troppo né troppo poco. Ma per molti versi non sarebbe sostenibile. Il primo motivo è il seguente.

È vero che i nostri assiomi rendono possibile formare gli insiemi noti come $a+b$, $S(a)$, $\mathrm{P}(a)$, $\|[c\ a]\|$ e la *separazione* (*Aussonderung*), che costituiscono il punto di partenza degli insiemi finiti e numerabili, ma non garantiscono che, oltre agli insiemi così ottenuti, non ne esistano altri irraggiungibili per questa via. A priori potrebbero esistere anche ottimi insiemi di questo genere. Per esempio, l'insieme a con un solo elemento che coincide con se stesso $a = (a)$; oppure la *successione decrescente di insiemi*: $a_1 = (a_2)$, $a_2 = (a_3)$, ... $((a)$ significa l'insieme con l'unico elemento $a)$.[28] Sarebbe augurabile poter eliminare questi insiemi superflui ma i nostri assiomi finora non lo consentono.

Per riempire la lacuna, Fraenkel auspica l'introduzione di un ulteriore, non ancora esattamente formulato assioma di restrizione, senza analoghi tra i nostri, che suona pressappoco così:

Eccetto gli insiemi (rispettivamente I e II-cose), assolutamente esistenti per gli assiomi, non esistono altri insiemi.

Vogliamo formulare precisamente l'assioma nel nostro formalismo. A tal fine diamo le definizioni seguenti:

Sia Σ il sistema delle I e II-cose. Sia Σ' un sistema parziale di Σ. Siano $\mathrm{I}_{\Sigma'}$ o $\mathrm{II}_{\Sigma'}$ rispettivamente tutte le I e II-cose di Σ'. $[x,y]_{\Sigma'}$ (x una $\mathrm{II}_{\Sigma'}$-cosa e y una $\mathrm{I}_{\Sigma'}$–cosa)[29] significa $[x,y]$; $(x,y)_{\Sigma'}$ (x, y cose $\mathrm{I}_{\Sigma'}$) significa (x,y), $A_{\Sigma'}$ è A, $B_{\Sigma'}$ è B.

Se le cose $\mathrm{I}_{\Sigma'}$, $\mathrm{II}_{\Sigma'}$, le operazioni $[xy]_{\Sigma'}$, $(xy)_{\Sigma'}$ e le cose $A_{\Sigma'}$ e $B_{\Sigma'}$ soddisfano i nostri assiomi diciamo brevemente che Σ' soddisfa i nostri assiomi.

Il citato assioma di restrizione richiede, allora, semplicemente che

Oltre Σ stesso nessun altro sistema Σ' parziale di Σ soddisfa gli assiomi I-IV.

Così formulato, è chiaro che contro un assioma del genere (che vale naturalmente anche nel sistema di Fraenkel) possono essere fatte valere due obiezioni serie.

Innanzitutto, che è di tipo affatto diverso dai precedenti poiché, contrariamente ai principi finora formulati, non evita formazioni concettuali della teoria ingenua degli insiemi. Infatti, cosa intendere con *sistema parziale* (*Teilsystem*) di Σ (cfr. nota 21)? In nessun caso insiemi o classi nel senso dei precedenti assiomi, che possono avere solo I-cose come elementi mentre Σ e Σ'

[28] D. MIRIMANOFF, *Le antinomie di Russell e Burali Forti* (*L'enseignement mathématique*, XIX année, 1917, p. 42). Ricordiamo che nelle teorie degli insiemi che non impongono alle classi la caratteristica di essere ben fondate, per esempio per gli iperinsiemi di Aczel, la classe $a = (a)$ è presa in considerazione. Addirittura con $a = (a)$ si definisce l'unica classe con tale caratteristica. [N.d.T.]

[29] Nel testo compare: x una $\mathrm{I}_{\Sigma'}$ -cosa e y una $\mathrm{II}_{\Sigma'}$ -cosa. Probabilmente una svista. [N.d.T.]

ganze Axiomatisieren zu einem Zirkel machen!

Diese Schwierigkeit wäre indes zu beheben, indem wir etwa annehmen würden, es läge ein größeres System P (von I_P, II_P Dingen, mit Operationen $[xy]_P$, $(xy)_P$, und zwei Dingen A_P, B_P, welches unseren Axiomen I.-V. auch genügte) vor, derart, daß alle I. und II. Dinge I_P Dinge sind, und $[xy]$, (xy) in P beide auf die dortige Normalform $[a(xy)_P]$ a ein II_P Ding) gebracht werden können. Dann ist Σ ein Bereich in P und seine „Teilsysteme" Σ' sind einfach als seine Teilbereiche (in P) aufzufassen.. Wir hätten eine „höhere Mengenlehre" P über Σ gelagert, in der auch Dinge, die in Σ argumentunfähig sind, Argumente sind. Das ist an sich nicht absurd: Wenn wir die „zu großen" argumentunfähigen Mengen in einem neuen Systeme P argumentfähig machen, so können wir die Antinomien noch immer umgehen, wenn wir die aus diesen allen gebildeten „noch größeren" (d. h. in P zu großen) Mengen ihrerseits zulassen, aber als argumentunfähig erklären. Die Idee ist teilweise dieselbe wie die, die der *Russell*schen „Stufenbildung" zu Grunde liegt.

In einer solchen „höheren Mengenlehre" P hätte es also einen Sinn zu fragen, ob das erwähnte Bestimmtheitsaxiom (für die „niedrigere Mengenlehre" Σ) erfüllt ist. Im folgenden werden wir der Einfachheit halber zwar die Terminologie der naiven Mengenlehre anwenden, aber man wird dabei stets sich vergegenwärtigen müssen, daß die Existenz eines „höheren" Systems P angenommen ist. Ohne eine solche Hypothese (die noch etwas problematischer ist als die von der Widerspruchfreiheit der Mengenlehre) kann man eben keine Untersuchung der den Axiomen genügenden Systeme Σ' vornehmen, es sei denn, daß man sich kritiklos in die Terminologie der (widerspruchvollen) naiven Mengenlehre finden will.

Und nun tritt die zweite Schwierigkeit auf. Daß ein System, welches den Axiomen I.-V. genügt, das Beschränktheitsaxiom nicht zu erfüllen braucht, ist leicht nachweisbar (vgl. oben). Man müßte daher etwa das folgende wissen:

Wenn das System Σ den Axiomen I.-V. genügt, so kommt unter seinen Teilsystemen Σ', die denselben auch genügen, mindestens ein kleinstes vor, d. h. eines mit der folgenden Eigenschaft: Außer Σ' selbst genügt kein Teilsystem von Σ' den Axiomen I.-V.

Dieses Teilsystem würde also dem Beschränktheitsaxiom genügen. Ein solches kleinstes Teilsystem könnte z. B. der gemeinsame Teil (Durchschnitt) aller den Axiomen I.-V. genügenden Teilsysteme Σ' von Σ sein (nämlich falls dieser den Axiomen I.-V. wieder genügen sollte). Allerdings braucht er es nicht zu sein. Nun zeigt aber eine nähere Untersuchung, daß der einzige bekannte Weg zur Herstellung eines solchen Teilsystems versagt. Wir werden später den Umstand nennen, an dem das liegt. Aus diesen Gründen glauben wir folgern zu müssen, daß erstens das Beschränktheitsaxiom unbedingt zu verwerfen ist, und daß es zweitens überhaupt nicht gelingen kann, ein Axiom mit demselben Effekte zu formulieren. Dies hängt übrigens auch mit der fehlenden „Kategorizität" des Axiomensystems I.-V. zusammen, von der noch in § 5 die Rede sein wird.

Aber wenn es auch nicht gelingen kann, ein kleinstes den Axiomen I.-V. genügendes Teilsystem von Σ zu finden, so wollen wir doch sehen, welche den Axiomen I.-V.

contengono I e II-cose. Ma allora cosa resta, dovendo interdire il concetto ingenuo di insieme? L'assioma renderebbe circolare l'intera assiomatizzazione!

La difficoltà si eliminerebbe presupponendo qualcosa come l'esistenza di un sistema più grande P di cose I_P e II_P con operazioni $[xy]_P$ e $(xy)_P$, e due cose A_P, B_P che soddisfi i nostri assiomi I-V, tale che tutte le I e II-cose siano I_P-cose e $[xy]$ e (xy) in P possano entrambe essere portate nella forma normale ivi vigente $[a(x,y)_P]$ (con a II_P-cosa). Allora Σ è una classe (*Bereich*) in P e i suoi *sistemi parziali* Σ' vanno semplicemente intesi come sottoclassi (*Teilbereiche*) in P.. Avremmo così disteso sopra Σ una *teoria superiore degli insiemi* in cui cose che in Σ non sono argomentabili lo diventano. Il che non è assurdo in sé. Nel nuovo sistema P, una volta resi argomentabili insiemi *troppo grandi* per esserlo, possiamo ancora evitare le antinomie, pur ammettendo tutti gli insiemi ancora *più grandi* (cioè, troppo grandi in P) costruiti a partire da quelli, a patto di dichiararli non argomentabili. L'idea è parzialmente la stessa di quella alla base della teoria dei tipi di Russell.

In tale *teoria superiore degli insiemi* avrebbe senso chiedersi se è soddisfatto il citato assioma di determinazione per la *teoria inferiore* Σ. Per semplificare, in quanto segue applicheremo la terminologia della teoria ingenua degli insiemi ma senza mai dimenticare che è stata supposta l'esistenza di un sistema *superiore P.* Senza tale ipotesi (ancora più problematica della non contraddittorietà della teoria degli insiemi) non si può intraprendere alcun esame dei sistemi Σ' che soddisfa gli assiomi, a meno di non volere acriticamente ricadere nella terminologia - contraddittoria - della teoria ingenua degli insiemi.

Ed ora ecco la seconda difficoltà. Che un sistema soddisfacente gli assiomi I-V non debba necessariamente soddisfare l'assioma di restrizione (*Beschränkheitaxiom*), si può facilmente dimostrare. A tal fine si dovrebbe sapere pressappoco che:

Se il sistema Σ soddisfa gli assiomi I-V, allora tra i suoi sistemi parziali Σ' soddisfacenti gli stessi assiomi ne esiste uno più piccolo, cioè uno con la proprietà: oltre a Σ', nessun sistema parziale di Σ' soddisfa gli assiomi I-V.

Tale sistema parziale dovrebbe soddisfare anche l'assioma di restrizione. Un sistema minimale siffatto potrebbe essere la parte comune (intersezione) di tutti i sistemi parziali Σ' di Σ che soddisfano gli assiomi I-V (nel caso in cui l'intersezione stessa soddisfi ancora gli assiomi I-V). Tuttavia, non è necessario. L'esame più ravvicinato mostra che l'unica via nota per costruire tale sistema parziale porta al fallimento. In seguito diremo da cosa ciò dipende. Pertanto crediamo di dover trarre le seguenti conclusioni: primo, l'assioma di restrizione è da rigettare incondizionatamente; secondo, è impossibile riuscire a formulare un assioma con gli stessi effetti. Ciò è connesso anche alla mancanza di *categoricità* del sistema di assiomi I-V, di cui riparleremo nel § 5.

Ma, anche nel caso in cui non si riesca a trovare un sistema minimale parziale di Σ soddisfacente gli assiomi I-V, intendiamo verificare quali sistemi parziali di Σ

genügende Teilsysteme von Σ existieren können. Wir stoßen dabei auf eine höchst eigentümliche Erscheinung, die zuerst von *Löwenheim* und *Skolem*[30] bemerkt wurde.

§ 2. Über Teilsysteme.

Es liege ein Teilsystem *Σ'* vor. Wir wollen nun die Bedingung, daß *Σ'* den Axiomen genügt, genau formulieren.

Für die Axiome I. 1, 2? 3, ist dies ganz leicht. Sie lauten einfach so:

1. *A, B* gehören zu *Σ'*.

2. Wenn *x, y* zu *Σ'* gehören, so gehört auch [*x, y*] und (*x, y*) zu *Σ'*.

Für II. 1-7, III. l., IV. l. besteht eine gewisse Schwierigkeit. II. 1. verlangt z. B.:

Ein II. Ding *a* gehöre zu *Σ'*, für welches für alle II. Dinge *x* von *Σ'* [*ax*] = *x* ist.

Analog bei II.2.-IV. l. Um das zu vermeiden, verlangen wir aber einfach stets etwas mehr, nämlich:

3. Ein II. Ding *a*, für das stets (d. h. für alle I. Dinge aus *Σ*, ebenso in folgenden). [*ax*] = *x* ist, gehört zu *Σ'*.

4. Das I. Ding u gehöre zu *Σ'*. Dann gehört ein II. Ding *a*, für das stets [*ax*] = *u* ist, zu *Σ'*.

5. Ein II. Ding *a*, für das stets [*a*(*xy*)] = *x* ist, gehört zu *Σ'*.

6. Ein II. Ding *a,* für das stets [*a*(*xy*)] = *y* ist, gehört zu *Σ'*.

7. Ein II. Ding *a*, für das stets [*a*(*xy*)] = [*xy*] ist, gehört zu *Σ'*.

8. Wenn die II. Dinge *a, b* zu *Σ'* gehören, so gehört ein II. Ding *c*, für das stets [*cx*] = ([*ax*] [*b x*]) ist, zu *Σ'*.

9. Wenn die II. Dinge *a, b* zu *Σ'* gehören, so geört ein II. Ding *c*, für das stets [*cx*] = [*a*[*bx*]] ist, zu *Σ'*.

10. Ein II. Ding *a*, für das [*a*(*xy*)] ≠ *A* mit *x*=*y* gleichbedeutend ist, gehört zu *Σ'*.

11. Ein II. Ding *a*, für das [*ax*] ≠ *A* damit gleichbedeutend ist, daß *x* ein I. II. Ding ist, gehört zu *Σ'*.

(Daß solche II. Dinge überhaupt vorhanden sind, garantieren die entsprechenden Axiome II. 1.-IV. l.) Von hier an haben wir also hinreichende, aber nicht mehr notwendige Bedingungen. Und damit schwindet die Möglichkeit, ein kleinstes Teilsystem zu finden,

---

[30] *Löwenheim*. Über Möglichkeiten im Relativkalkül (Mathemat. Annalen 76,1915, S. 447-470); *Skolem*, Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweiskraft mathematischer Sätze...); Didenskapsselskapets Skrifter l. Mat. Naturv. Klasse 1920. No. 4. Christiania; Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre (Mathematiker Kongressen i Helsingfors, Helsingfors 1923, Seite 217-232); Vgl. hierzu *Fraenkel*, Zitat von Fußnote 6.
In den beiden ersten Arbeiten wird der Satz allgemein bewiesen, dessen Spezialfall für die Mengenlehre den Gegenstand des folgenden § 2 bildet: Jedes überhaupt erfüllbare Axiomensystem ist bereits durch abzählbare Systeme erfüllbar. In der letzten Arbeit zieht *Skolem* hieraus die (ungünstigen) Konsequenzen für die Mengenlehre.
Trotzdem also der Inhalt der §§ 2 und 3 nicht neu ist, glauben wir, daß es nicht unnütz ist, auf diesen interessanten Umstand wieder eingehend hinzuweisen.

soddisfacenti gli assiomi I-V possano esistere. Ci imbattiamo a questo punto in un fenomeno altamente caratteristico, osservato per la prima volta da Löwenheim e Skolem.[31]

§ 2. Sui sistemi parziali[32]

Sia *Σ'* un sistema parziale. Formuliamo le condizioni esatte perché *Σ'* soddisfi gli assiomi.

Per gli assiomi I.1,2,3, è abbastanza facile. Recitano semplicemente:

1. *A* e *B* appartengono a *Σ'*.
2. Se *x*,*y* appartengono a *Σ'*, allora appartengono a *Σ'* anche [*xy*] e (*x*,*y*).

Per II.1-7; III.1; IV.1 ci sono delle difficoltà. Per esempio, II.1 richiede:

Una II-cosa *a* tale che, per tutte le I-cose *x* di *Σ'* , [*ax*] = *x* appartiene a *Σ'*.[33]

Analogamente per II.2 - IV.4. Per evitare ciò richiediamo semplicemente sempre qualcosa in più, e cioè:

3. Una II-cosa *a* tale che sempre (cioè, per tutte le I-cose *x* di *Σ* e altrettanto nel seguito) [*ax*] = *x* appartiene a *Σ'*.
4. La I-cosa *u* appartenga a *Σ'*. Una II-cosa *a* tale che sempre [*ax*] = *u* appartiene a *Σ'*..
5. Una II-cosa *a* tale che sempre [*a*(*xy*)] = *x* appartiene a *Σ'*.
6. Una II-cosa *a* tale che sempre [*a*(*xy*)] = *y* appartiene a *Σ'*.
7. Una II-cosa *a* tale che sempre [*a*(*xy*)] = [*xy*] appartiene a *Σ'*.
8. Se le II-cose *a* e *b* appartengono a *Σ'*, allora appartiene a *Σ'* una II-cosa *c* tale che sempre [*cx*] = ([*ax*][*bx*]).
9. Se le II-cose *a* e *b* appartengono a *Σ'*, allora appartiene a *Σ'* una II-cosa *c* tale che sempre [*cx*] = [*a*[*bx*]].
10. Una II-cosa *a*, per cui [*a*(*xy*)] ≠ *A* equivale a *x* = *y*, appartiene a *Σ'*.

[31] L. LÖWENHEIM, *Su possibilità nel calcolo dei relativi* (Mathemat. Annalen 76,1915, p.447-470); TH. SKOLEM, *Ricerche logico-combinatorie sulla realizzabilità o forza dimostrativa di enunciati matematici secondo un teorema sugli insiemi densi* (*Didenskapsselkapets Skrifter I. Mat. Naturv. Klasse*, n. 4, Christiania, 1920); TH. SKOLEM, *Alcune osservazioni sulla fondazione assiomatica della teoria degli insiemi* (*Mathematiker Kongressen i Helsingfors*, 1923, p. 217-232). Cfr. A. FRAENKEL in nota 18.
Nei primi due lavori si dimostra l'enunciato generale. Il caso particolare della teoria degli insiemi costituisce l'oggetto del seguente § 2: *Ogni sistema assiomatico soddisfacibile è già soddisfacibile in un sistema numerabile*. Nell'ultimo lavoro Skolem trae le conseguenze (sfavorevoli) per la teoria degli insiemi. Benché il contenuto dei §§ 2 e 3 non sia nuovo, crediamo che non sia inutile richiamare l'attenzione sui dettagli di questa interessante circostanza.

[32] L'opzione di traduzione può essere criticata. Traduciamo *Teilsystem* con *sistema parziale* e non *sistema di parti* (né *sottosistema*), intendendo famiglie di sottoclassi del sistema originario. Interpretiamo che qui von Neumann pensi a strutture successivamente chiamate *filtri*, in topologia, o *ideali*, in algebra. Non si esclude neppure il riferimento alle *superclassi* di Monk. A giustificazione della scelta va detto che l'opzione a favore di *parziale* è scontata da parte dell'analista. [N.d.T]

[33] Nell'originale si legge: *una II-cosa* a *tale che, per tutte le II-cose x di Σ',* [ax] = x *appartiene a Σ'*. Già con la nostra correzione si tratta di una formulazione altamente impredicativa. [N.d.T.]

daß den Axiomen genügt. Denn die zu formulierenden Bedingungen gehen alle zu weit.

Eine weitere Schwierigkeit tritt bei den Axiomen III. 2, 3. auf. Betrachten wir z. B. II. 2; es lautet so:

Das II. Ding a gehöre zu Σ'. Es gibt dann ein II. Ding b in Σ', so daß für alle I. Dinge x in Σ' $[bx] \neq A$ damit gleichbedeutend ist, daß für alle I. Dinge y in Σ' $[a(xy)] = A$ ist.

Wieder geht Σ' in die Definition des b ein, daß zu ihn gehören soll; denn um zu wissen, ob etwas „für alle I. Dinge y in Σ'" gilt, muß man ja ganz Σ' kennen. Indessen kann man diese Schwierigkeit überwinden, indem man erzwingt, daß in den in Betracht kommenden Fällen „für alle I. Dinge y in Σ'" dasselbe bedeutet wie „für alle I. Dinge y". Und das erreicht man einfach folgendermaßen:

(Vorbereitende Bedingung.)

12. Das II. Ding a und das I. Ding x sollen beide zu Σ' gehören. Wenn es überhaupt ein I. Ding y mit $[a(xy)] \neq A$ gibt, so soll auch mindestens ein derartiges y zu Σ' gehören.

Und nun können wir für III. 2. verlangen (und zwar wieder wie bei II. 1.-IV. l. etwas zu viel):

(Hauptbedingung.)

13. Das II. Ding a gehöre zu Σ'. Ein II. Ding b, für das stets $[bx] \neq A$ damit gleichbedeutend ist, daß stets $[a(xy)] = A$ ist, gehört dann zu Σ'.

Bei III. 3. ist die Lage dieselbe. Damit hier die „Einzigkeit" des y gefäßt werde, muß zur „vorbereitenden Bedingung" 12. noch die folgende hinzugenommen werden.

14. Das II. Ding a und die I. Dinge x, y mögen zu Σ' gehören. Wenn $[a(xy)] \neq A$ ist und wenn ein y' mit $[a(xy')] \neq A$, $y' \neq y$ existiert, so gehört auch ein solches; y' zu Σ'.

Und nun lautet die Hauptbedingung:

15. Das II. Ding a gehöre zu Σ'. Dann gehört ein II. Ding b zu Σ', für welches immer, wenn für ein einziges y $[a(xy)] \neq A$ ist, $[bx] = y$ ist.

Bei Axiom I. 4. brauchen wir wieder eine „vorbereitende Bedingung":

16. Die II. Dinge a, b gehören zu Σ'. Wenn es ein x mit $[ax] \neq [bx]$ gibt, so gehört auch ein solches x zu Σ'.

Eine Hauptbedingung ist hier nicht nötig, da keine Existenz verlangt wird. (Alle diese Bedingungen sind hinreichend, aber nicht notwendig.)

Schließlich bleiben die Axiome IV. 2., V. 1.-3. übrig. Hier müssen auch entsprechende vorbereitende Bedingungen - 17.-I9. (für IV. 2., da 3 mal „alles" und „es gibt" superponiert sind), 20.-21. (für V. 1.), 22 (für V. 2,), 23 (für V.3.) formuliert werden, die wir nicht einzeln anführen wollen.

Was die Hauptbedingungen betrifft, so ist für die eine Hälfte von IV. 2. (wenn a kein I. II. Ding ist, so gibt es ein b, so daß usw.) eine notwendig. Sie lautet so

11. Una II-cosa a, per cui $[a(xy)] \neq A$ equivale al fatto che x è una I.II-cosa, appartiene a Σ'.

(L'esistenza di tali II-cose è garantita dai corrispondenti assiomi II.1- IV.1). Così abbiamo ottenuto condizioni sufficienti ma non necessarie. Contemporaneamente svanisce la possibilità di trovare un sistema parziale minimale che soddisfi gli assiomi. Infatti, le condizioni da formulare vanno tutte troppo oltre.

Con gli assiomi III.2,3 si presenta una difficoltà ulteriore. Consideriamo, per esempio, III.2.[34]

Sia a una II-cosa di Σ'. Esiste allora in Σ' una II-cosa b tale che per ogni I-cosa x di Σ' $[bx] \neq A$ equivale al fatto che, per tutte le I-cose y di Σ', $[a(xy)] = A$.

Di nuovo, Σ' rientra nella definizione di b che deve appartenere a Σ'. Infatti, per sapere se qualcosa vale *per tutte le* I-*cose y di* Σ', bisogna già conoscere tutto Σ'. Si può superare la difficoltà imponendo che nei casi in questione l'espressione: *per tutte le* I-*cose y di* Σ', significhi *per tutte le* I-*cose y*. Ciò si ottiene semplicemente come segue.

(Condizione preliminare)

12. La II-cosa a e la I-cosa x appartengano entrambe a Σ'. Se esiste una I-cosa y tale che sempre $[a(xy)] \neq A$, allora a Σ' appartiene almeno tale y.

Ora, per III.2, possiamo pretendere (e, in verità, per II,1 - IV,1 possiamo pretendere anche qualcosa di più), la

(Condizione principale)

13. Sia a una II-cosa di Σ'. Una II-cosa b tale che sempre $[bx] \neq A$ equivale a sempre $[a(xy)] = A$ appartiene a Σ'.

Per la III.3 la posizione è la stessa. Ottenuta così l'*unicità* della y, per la condizione preliminare 12, bisogna ancora ammettere quanto segue:

14. La II-cosa a e le I-cose x,y appartengano a Σ'. Se $[a(xy)] \neq A$ e se esiste una $y' \neq y$ tale che $[a(xy')] \neq A$, allora anche tale y' appartiene a Σ'.

Allora la condizione principale è:

15. Sia a una II-cosa di Σ'. Allora a Σ' appartiene una II-cosa b tale che sempre, se per un'unica y vale $[a(xy)] \neq A$, vale sempre $[bx] = y$.

Per l'assioma I.4 abbiamo bisogno di nuovo di una *condizione preliminare***:**

16. Siano a, b II-cose di Σ'. Se esiste una x tale che $[ax] \neq [bx]$, allora anche tale x appartiene a Σ'.

[34] Nell'originale si legge: II.2. [N.d.T]

24. a sei ein II. Ding, das kein I. II. Ding ist, und gehöre zu Σ'. Dann gehört ein II. Ding b zu Σ', für welches zu jedem x ein y mit $[ay] \neq A$, $[by] = x$ existiert. Für die andere Hälfte von IV. 2. (wenn es ein b gibt, für welches usw. so ist a kein I. II. Ding), ist aber gar keine Hauptbedingung nötig. Der Grund ist derselbe wie bei Axiom I. 4.: Es wird ja keine Existenz gefordert.

Bei den Axiomen V. 1.-3. schließlich brauchen wir auch keine Hauptbedingungen. Denn hier worden zwar Existenzen gefordert, aber Existenzen von I. II. Dingen. Daß nun $II_{\Sigma'}$ Dinge von den geforderten Eigenschaften existieren, folgt bereits aus den Axiomen der Gruppen I.-IV., d. h. für Σ' aus den Bedingungen 1.-I9, 24. Da aber diese $II_{\Sigma'}$, Dinge in Σ sicherlich I. II. Dinge sind (Σ' erfüllt ja die Axiome der Gruppe V.), so müssen sie auch I. $II._{\Sigma'}$ Dinge sein. (I. II. $_{\Sigma'}$, Dinge sind ja definiert, als zu Σ' gehörende I. II. Dinge.)

Zusammenfassend können wir also sagen:

Dazu, daß Σ' den Axiomen genüge, ist es jedenfalls hinreichend, daß die Bedingungen 1.-24. erfüllt seien. Jede der Bedingungen 1.-24. hat die folgende Form:

Die I. oder II. Dinge u_1, u_2 ... u_n sollen zu Σ' gehören. Wenn sie der Bedingung $A(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ genügen und wenn es I. oder II. Dinge v gibt, die der Bedingung $B(u_1, u_2, \ldots, u_n, v)$ genügen, so gehört auch ein solches v zu Σ.

In die Bedingungen A, B gehen dabei (außer u_1, u_2, ..., u_n, bzw. u_1, u_2, ... u_n, v) bloß Eigenschaften von Σ ein, Σ' kommt in ihnen nicht vor. Für gewisse Bedingungen 1, 3, 5-7, 10-11) ist dabei $n = 0$ zu setzen, d. h. es wird verlangt: Wenn ein v mit der Eigenschaft $B(v)$ existiert, so gehöre ein solches v zu Σ'.

Solchen Bedingungen kann man aber leicht genügen. Es gibt offenbar ein kleinstes Σ', das diesen Bedingungen genügt (welche aber weitergehend sind, als die ursprüngliche Forderung, daß Σ' den Axiomen genüge). Man hat nur das folgende Verfahren anzuwenden:

Man nehme alle Bedingungen 1.-24., in denen $n = 0$ ist (siehe oben), und bilde die durch dieselbe postulierten I. oder II. Dinge $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$. Sodann nehme man alle Bedingungen 1.-24., in denen $n \geq 1$ ist (d. h. die wirklich Variable $u_1, u_2, \ldots, u_n$. enthalten). Man setze sie in alle möglichen Kombinationen von $v_1, v_2, \ldots, v_\mu$ ein, und bilde die dann postulierten I. oder II. Dinge $v'_1, v'_2, \ldots, v'_{\mu'}$. Man setze in sie dann alle möglichen Kombinationen von $v_1, v_2, \ldots v_\mu$; $v'_1, v'_2, \ldots, v'_{\mu'}$, ein, und bilde dann die postulierten I. und II. Dinge $v''_1, v''_2, \ldots, v''_{\mu''}$.- usw.

Wenn wir nun Σ' als das System der Dinge $v_1, v_2, \ldots v_\mu$; $v'_1, v'_2, \ldots, v'_{\mu'}$; $v''_1, v''_2, \ldots, v''_{\mu''}$; ... wählen, so haben wir ein System, das unseren Axiomen genügt.

§ 3. Die Abzählbarkeit.

Das Σ', das wir im § 21 gewonnen haben, hat eine höchst überraschende Eigenschaft: Es ist offenbar abzählbar. Dabei ist auf den Sinn des Wortes „abzählbar" zu achten. Σ' ist nicht abzählbar in dem Sinne daß es als Bereich im Systeme Σ (oder Σ') die Mächtigkeit $\aleph_0$ hat, d. h. auf die erste unendliche Ordnungszahl ω durch ein II. Ding aus Σ ein-eindeutig abgebildet werden kann[35]. Davon kann natürlich keine Rede sein,

[35] Dies ist in der Tat gleichbedeutend mit „abzählbar", weil nach unserer Definition der

Infine, rimangono gli assiomi IV.2, V.1-3. Anche in questo caso vanno formulate le corrispondenti condizioni preliminari: 17. - 19. (per IV.2, perché si sovrappongono tre volte gli operatori *per tutti* ed *esiste*), 20.-21. (per V.1), 22. (per V.2), 23. (per V.3), che non vogliamo addurre una per una.

Per quanto riguarda le condizioni principali, ne è necessaria una per la metà di IV.2 (se a non è una I.II-cosa, allora esiste una b ecc.). Essa afferma:

24. Sia a una II-cosa di Σ' che non è una I.II-cosa. Allora una II-cosa b tale che, per ogni x, esiste una y per cui $[ay] \neq A$, $[by] = x$ appartiene a Σ'.

Per l'altra metà di IV.2 (se esiste una b tale che ecc., allora a non è una I.II-cosa) non è necessaria nessuna condizione principale. La ragione è la stessa che per l'assioma I.4: non si richiede alcuna esistenza.

Infine, anche per gli assiomi V.1-3 non occorrono condizioni principali. Infatti, in questo caso vengono richieste delle esistenze ma di I.II-cose. Ora, l'esistenza di $\mathrm{II}_{\Sigma'}$- cose di prefissate caratteristiche segue già dagli assiomi dei gruppi I-IV, cioè, per Σ', dalle condizioni 1-19.24. Poiché queste $\mathrm{II}_{\Sigma'}$-cose sono in Σ sicuramente I.II-cose (Σ soddisfa già gli assiomi del gruppo V), saranno anche I. $\mathrm{II}_{\Sigma'}$ - cose (le I. $\mathrm{II}_{\Sigma'}$ - cose sono proprio definite come I.II-cose appartenenti a Σ').

Riassumendo possiamo allora dire che, affinché Σ' soddisfi gli assiomi, è in ogni caso sufficiente che siano soddisfatte le condizioni 1-24. Ognuna di loro ha la seguente forma:

Siano $u_1 , u_2 \ldots u_n$ I o II-cose appartenenti a Σ' che soddisfano la condizione $A(u_1 , u_2 \ldots u_n)$. Se esiste una I o II-cosa v insieme alla quale soddisfano la condizione $B(u_1 , u_2 \ldots u_n , v)$, allora anche v appartiene a Σ'.

Nelle condizioni A, B figurano, oltre a $u_1 , u_2 \ldots u_n$ o $u_1 , u_2 \ldots u_n , v$, solo proprietà caratteristiche di Σ'; Σ non compare. Per certe condizioni (1,3,5-7,10-11) va posto $n = 0$, cioè, si richiede che, se esiste una v con la proprietà caratteristica $B(v)$, v appartenga a Σ'.

È facile soddisfare tali condizioni. Chiaramente esiste un Σ' minimo che le soddisfa (alcuni condizioni però sono tanto ampie come la richiesta originaria che Σ' soddisfi gli assiomi). C'è solo da applicare il seguente processo:

Si prendano tutte le condizioni 1-24 in cui $n = 0$ (vedi sopra) e si costruiscano le I o II-cose $v_1 , v_2 \ldots v_\mu$ da loro postulate. Successivamente si prendano tutte le condizioni 1-24 in cui $n = 1$ (cioè quelle che contengono le vere variabili $u_1 , u_2 \ldots u_n$). Le si inseriscano in tutte le combinazioni possibili di $v_1 , v_2 \ldots v_\mu$ e si costruiscano così le I o II-cose $v'_1 , v'_2 \ldots v'_{\mu'}$ postulate. Si inseriscano poi queste in tutte le combinazioni di $v_1 , v_2 \ldots v_\mu ; v'_1 , v'_2 \ldots v'_{\mu'}$ e si costruiscano le postulate I o II-cose $v''_1 , v''_2 \ldots v''_{\mu''}$; ecc.

Scegliendo Σ' come il sistema delle cose $v_1 , v_2 \ldots v_\mu ; v'_1 , v'_2 \ldots v'_{\mu'} ; v''_1 , v''_2 \ldots v''_{\mu''}$, otteniamo un sistema che soddisfa i nostri assiomi.

§ 3. La numerabilità

Ordnungszahl ω eine abzählbare Menge darstellt. (Vgl. das Zitat von Fußnote S. 223.)

denn Σ' ist ja überhaupt kein Bereich, es enthält auch II. Dinge (siehe Kapitel 1). Außerdem sind Teile von ihm (nämlich alle unabzählbaren Teilbereiche von Σ') „unabzählbar“ in dem Sinne, den dieser Begriff im System Σ' hat. Aber es ist „abzählbar“, wenn wir es als Bereich in dem „höheren“ Systeme P betrachten (und die vorhin erwähnten Teilbereiche alle mit ihm), oder mit den Worten der naiven Mengenlehre: Seine Elemente können *de facto* in eine Reihe geschrieben werden.

Es ist wesentlich, hier alle Mißverständnisse auszuschalten. Im System Σ' liegen eine Reihe von Mengen und von Abbildungen vor. Diese genügen den formalen Anforderungen der Mengenlehre. Die Mengen haben alle möglichen Mächtigkeiten. Aber alle diese Mächtigkeiten sind scheinbar, sind nur Mächtigkeiten relativ zur Gruppe der Abbildungen des Systems. Denn das System Σ' umfaßt (trotz seiner formalen Vollständigkeit) noch lange nicht alle denkbaren Abbildungen. Ein „höheres“ System P muß bereits neue Abbildungen enthalten, so z. B. solche, die alle (unendlichen) Mengen in Σ' auf einander abbilden. Denn als Teile des (in P) abzählbaren Σ'sind ja alle abzählbar, also (in P) gleichmächtig. Man könnte vielleicht glauben, es bestände hier ein Widerspruch zum Axiom IV. 2.: Kann doch das II. Ding ω (oder irgendein unendliches I. 11. Ding) auf den Bereich aller I. Dinge abgebildet werden, und es ist trotzdem ein I. II. Dinge! Aber es ist was die Antwort sein muß: Die fragliche Abbildung gehört zu P (ist II_P Ding) und nicht zu Σ', und nur auf II. Dinge aus Σ' bezog sich naturgemäß das Axiom IV.2.

Diese Relativität der Mächtigkeiten ist ein sehr krasses Zeugnis dafür, wie weit die abstrakt-formalistische Mengenlehre von allem, was anschaulich ist, liegt. Man kann wohl Systeme Σ' herstellen, die durch Erfüllen gewisser formaler Axiome die Mengenlehre bis in alle Details treu repräsentieren, die also eigentlich die formale Mengenlehre selbst sind. Es treten in ihnen alle bekannten Mächtigkeiten auf in ihrer unendlich großen Anzahl, die großer als jede Mächtigkeit ist. Aber sobald man feinere Untersuchungsinstrumente ansetzt („höhere“ Systeme P) löst sich das alles in nichts auf. Von allen Mächtigkeiten bleibt nichts als die endlichen und die abzählbare übrig. Nur diese haben realen Sinn, alles andere ist formalistische Fiktion.

Dieser Umstand ist übrigens keineswegs etwa eine spezielle Eigenschaft unserer Axiomatik: Das im § 2 angewandte Verfahren könnte man fast genau so anwenden (vgl. die Arbeiten von *Löwenheim und Skolem),* wenn an Stelle unserer Axiome irgendwelche andere logische Bedingungen gesetzt würden. Die soeben ausgeführte Konstruktion drückt jeder axiomatischen Mengenlehre den Stempel der Irrealität (oder mit einem viel benützten Worte „Imprädikativität“) auf.

§ 4. Mengenlehrenmodelle.

Wir wissen jetzt: wenn es überhaupt möglich ist ein System Σ zu finden, welches den Axiomen genügt, so kann man auch ein solches System finden, in dem es nur abzählbar viele I. Dinge und abzählbar viele II. Dinge gibt. Dies läßt es aber als möglich erscheinen, daß man rein arithmetisch ein Modell für die Mengenlehre findet. Man könnte etwa den folgenden Ansatz machen:

Il *Σ'* ottenuto nel § 2 ha una proprietà (*Eigenschaft*) fortemente sorprendente: è chiaramente numerabile. Pertanto bisogna prestare attenzione al senso della parola *numerabile*. *Σ'* non è numerabile nel senso che, come classe (*Bereich*) ha nel sistema *Σ* (o *Σ'*) la potenza di $\aleph_0$, cioè che può essere biunivocamente applicato sul primo numero ordinale ω mediante una II-cosa di *Σ*..[36] Naturalmente, questo senso è escluso perché *Σ'*, contenendo anche II-cose, non è una classe (cfr. Cap. 1).[37] Inoltre, sue parti, come tutti le sottoclassi (*Teilbereiche*) non numerabili di *Σ'*, sono *non numerabili* nel senso che questo concetto ha nel sistema *Σ'*. Ma *Σ'* è *numerabile* se lo trattiamo come classe nel sistema *superiore P* (con tutte le sottoclassi già citate) o, con le parole della teoria ingenua degli insiemi: i suoi elementi possono *de facto* essere descritti in serie.

A questo punto è essenziale eliminare ogni fonte di incomprensione. Nel sistema *Σ'* esiste una serie di insiemi e di applicazioni. Gli insiemi hanno tutte le potenze possibili. Ma sono tutte solo apparenti. Sono potenze relative al gruppo delle applicazioni del sistema. Infatti, nonostante la sua perfezione formale, il sistema *Σ'* non contiene tutte le applicazioni pensabili. Un nuovo sistema *P superiore* deve già contenere nuove applicazioni, per esempio, quelle che applicano tutti gli insiemi (infiniti) di *Σ'* l'uno sull'altro. Infatti, in quanto parti di *Σ'*, numerabile in *P*, sono già tutte numerabili e, quindi, equipotenti (in *P*). Si potrebbe credere, forse, che ciò contraddica l'assioma IV.2. Infatti, la II-cosa ω (o qualunque altra I.II-cosa infinita) potrebbe essere applicata su tutta la classe delle I-cose ed essere ciononostante una I.II-cosa! È chiaro quale deve essere la risposta: l'applicazione in questione appartiene a *P* (è II_P-cosa) e non a *Σ'* e si riferisce solo alle II-cose di *Σ'* conformemente all'assioma IV.2.

La relatività delle potenze testimonia in modo evidente, quanto la teoria astratto-formalistica sia lontana da tutto ciò che è intuitivo. Si possono costruire sistemi *Σ'* che, soddisfacendo certi assiomi formali, rappresentano fedelmente la teoria degli insiemi in tutti i dettagli al punto da essere essi stessi la teoria formale degli insiemi. Vi fanno la loro comparsa tutte le potenze conosciute nel loro numero infinitamente grande, più grande di ogni potenza. Ma appena si applicano strumenti di analisi più fini (sistemi P *superiori*) tutto svanisce nel nulla. Di tutte le potenze non rimane altro che le finite e la numerabile. Solo queste hanno senso reale. Tutto il resto è finzione formalistica.

Per altro, la circostanza non è una proprietà specifica della nostra assiomatica. Il processo del § 2 potrebbe essere applicato quasi così com'è (cfr. i lavori di Löwenheim e Skolem) se al posto dei nostri assiomi ci fossero altre condizioni logiche qualsivoglia. La costruzione appena esposta imprime a ogni teoria assiomatica degli insiemi il marchio di irrealtà o, con parola molto usata, di *impredicatività*.

§ 4. Modelli della teoria degli insiemi

---

[36] Di fatto ciò equivale a *numerabile* perché, secondo la nostra definizione di numero ordinale, ω rappresenta un insieme numerabile. (Cfr. la citazione in nota 13).

[37] Il punto ci sembra stabilito in modo incerto. Forse l'autore intende dire che non si tratta di una *classe propria.* Ma la distinzione tra *classi* e *classi proprie* è successiva, essendo dovuta al perfezionamento della formalizzazione dovuto a Gödel e Bernays. [N.d.T.]

Die I. Dinge seien die ganzen Zahlen 1, 2, ...

Die II. Dinge seien alle Funktionen f auf einer Menge Φ von Funktionen (Φ ist selbstverständlich ebenfalls abzählbar), deren Definitionsbereich und Wertevorrat die ganzen Zahlen sind.

(x, y) sei eine gegebene Funktion $p(xy)$, definiert für $x, y = 1, 2,...$

$[xy]$ sei $f(y)$ wenn x die Funktion f aus Φ und $y = 1, 2,...$ ist.

A sei 1, B sei 2.

Es ist aber noch eine Korrektion bezüglich der I. II. Dinge anzubringen; denn so wie der Ansatz zunächst lautet, sind die I. Dinge von den II. Dingen alle verschieden. Dem ist aber leicht abzuhelfen. Wir nehmen an, daß alle I. Dinge auch I. II. Dinge sind. Dieser Erweiterung des Axioms IV. l. ist unwesentlich; man kann zeigen: sind die Axiome widerspruchfrei, so sind sie es auch mit dieser Erweiterung. Dann müssen wir einfach zu jedem I. Dinge, d. h. zu jeder Zahl 1, 2,... angeben, mit welchem II. Ding, d. h. mit welcher Funktion aus Φ es zu identifizieren ist. Zu diesem Zwecke brauchen wir eine weitere 2-Variablen-Funktion $\varphi(xy)$; dann werden wir der Zahl x die Funktionen $\varphi(xy)$ (als Funktion von y betrachtet) zuordnen, die also zu Φ gehören muß. Also:

Die Funktion $\varphi(xy)$ sei definiert für $x, y = 1, 2,...$

Für festes x ist $\varphi(xy)$ Funktion von y, als solche gehöre es für jedes x zu Φ.

Es fragt sich noch, welchen Bedingungen die beiden Funktionen p, φ und die Menge von Funktionen Φ (nur sie sind noch im Ansatze willkürlich) zu genügen haben, damit die Axiome erfüllt seien.

Man kann zunächst zeigen, daß man für $p(xy)=(xy)$ z. B. $2^{x-1}..(2y\text{-l})$ wählen darf (aus $p(x_1, y_1)=p(x_2, y_2)$ folgt $x_1=x_2, y_1=y_2$.), denn diese Funktion spielt keine besonders tiefliegende Rolle. Wesentlich aber ist die Wahl von $\varphi(x\,y)$ und von Φ.

Nun kann man die Bedingungen für diese beiden formulieren. Wir wollen das hier nicht mehr im einzelnen durchführen, sondern nur einiges über ihre Form angeben.

Die Bedingungen werden (gegenüber denen im § 3) dadurch wesentlich verschärft und kompliziert, daß nun das System nicht mehr Teil eines größeren ist, welches die Axiome erfüllt (wie Σ' von Σ). Sie werden infolgedessen auch nicht mehr den einfach erfüllbaren Charakter haben. Besonders bedenklich wird das Axiom IV. 2. Denn es fordert, daß keine Funktion, die eine Menge $\varphi(x\,y)\neq 1$ (x fest, y das Element) auf die Menge aller Zahlen abbildet, zu Φ gehören darf. Während nun die meisten Bedingungen dem Φ eine untere Grenze vorschreiben (d. h. verlangen, daß gewisse Funktionen zu Φ gehören müssen) schreibt ihm dieses Axiom eine obere Grenze vor. Man hat zunächst gar keine Garantie dafür, ob die beiden Grenzen nicht kollidieren, was neue Antinomien bedeuten würde. Das ist indessen kein so schwerwiegendes Argument gegen die Wahl des Axioms IV. 2., als man zunächst denken möchte. Denn an Stelle von IV. 2. müßte man ja doch zu allermindest das *Zermelo*sche Aussonderungs-Axiom annehmen (und das wäre noch für viele Zwecke gar nicht hinreichend) etwa in folgender Form:

Ora lo sappiamo. Se è possibile trovare un sistema *Σ'* che soddisfi gli assiomi, allora è possibile trovare un sistema in cui esistono soltanto una molteplicità numerabile di I-cose e una molteplicità numerabile di II-cose. Perciò sembra si possa trovare un modello puramente aritmetico della teoria degli insiemi. Le cose si potrebbero impostare così:

Le I-cose sono i numeri interi 1, 2, ...
Le II-cose sono tutte le funzioni f di un insieme di funzioni Φ, evidentemente numerabile, di cui dominio e codominio[38] sono i numeri interi.
(x,y) è una funzione data $p(x,y)$, definita per $x,y = 1,2, ...$
$[x,y]$ è $f(y)$ se x è la funzione f di Φ e $y = 1,2, ...$
A è 1, B è 2.

Ma c'è ancora un'altra correzione da apportare in rapporto alle I.II-cose. Infatti, come è immediatamente evidente dall'impostazione, le I-cose sono tutte diverse dalle II-cose. Ma a questo si rimedia facilmente assumendo che tutte le I-cose siano anche I.II-cose. L'ampliamento dell'assioma IV.1 è inessenziale. Si può mostrare che, se gli assiomi sono non contraddittori, tali restano dopo questo ampliamento. Allora dobbiamo semplicemente indicare per ogni I-cosa, cioè per ogni numero intero 1,2, ... , con quale II-cosa, cioè con quale funzione di Φ, va identificata. A tale scopo ci serve l'ulteriore funzione a due variabili $\varphi(x,y)$. Allora, al numero x associeremo, trattandola come funzione di y, la funzione $\varphi(x,y)$, che deve pertanto appartenere a Φ. Infatti, una volta definita la funzione $\varphi(x,y)$ per $x,y = 1,2, ...$, per x costante $\varphi(x,y)$ risulta funzione di y.. In quanto tale appartiene a Φ per ogni x.

Resta da chiedersi a quali condizioni le due funzioni p, φ e l'insieme delle funzioni Φ, tuttora arbitrarie nell'impostazione, debbano soddisfare per realizzare gli assiomi. Si può immediatamente dimostrare che per $p(xy) = (xy)$ sono possibili, per esempio, $2^{x-1}(2y-1)$ scelte (da $p(x_1,y_1) = p(x_2,y_2)$ segue $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$). In effetti, questa funzione non svolge un ruolo particolarmente profondo. Essenziale, invece, è la scelta di φ e Φ per le quali ora possiamo formulare le condizioni. In questa sede non vogliamo tanto entrare nei dettagli quanto dare solo alcune indicazioni sulla loro forma.

Rispetto a quelle del § 3 le condizioni diventano più forti e complesse perché ora il sistema non è solo parte di uno più grande che soddisfa gli assiomi (come *Σ'* di *Σ*). Di conseguenza non avranno più il carattere di essere facilmente realizzabili. Particolarmente problematico diventa l'assioma IV.2. Il quale, infatti, richiede che non possa appartenere a Φ alcuna funzione che applichi l'insieme $\varphi(xy) \neq 1$ (x costante, y l'elemento) sull'insieme di tutti i numeri. Mentre ora la maggior parte delle condizioni impongono a Φ un limite inferiore (cioè, richiedono che certe funzioni debbano appartenere a Φ), questo assioma prescrive un limite superiore. Niente garantisce che i due limiti non coincidano. Il che significherebbe nuove antinomie. In verità, non è un argomento così pesante contro la scelta dell'assioma V.2 come a prima vista si potrebbe pensare. Infatti, al posto dell'assioma IV si

[38] *Definitionsbereich* e *Wertebereich* (qui *Wertevorrat*) erano interpretati già prima di von Neumann come domini di *definizione* e *codominio.* Non avrebbe senso, in questo caso, tradurre *classe.* [N.d.T.]

IV. 2. Wenn *b* ein I. II. Ding und *a* ein II. Ding ist, und wenn $a \leq b$ ist, so ist auch *a* ein I. II. Ding.

Dieses Axiom entspricht dem *Aussonderungsaxiom*. Denn das *a* ein II. Ding ist, bedeutet dasselbe, was *Zermelo* als „durch eine definite Eigenschaft bestimmt“ bezeichnet. Zusammen mit $a \leq b$, wo *b* ein I. II. Ding ist, muß hieraus die Zulässigkeit von *a* folgen, d. h. daß *a* ein I. II. Ding ist.

Und dieses (absolut unvermeidliche) Axiom würde, wie man sich leicht überzeugt, genau dieselben Schwierigkeiten machen wie IV. 2. An der Stelle von IV. 2. muß eben unbedingt ein spezifisch „imprädikatives“ Axiom stehen; und ein derartiges Axiom muß bei der Konstruktion eines Modelles Schwierigkeiten machen.

Die Bedingungen, die in dieser Art gewonnen werden, sind so unübersichtlich und kompliziert, daß wir kein Modell angeben können, ja gar nicht feststellen können, ob sie überhaupt verträglich sind obgleich die Konstruktion durchführbar sein muß, falls die Mengenlehre auf nicht-intuitionistischer Basis überhaupt möglich ist.

Schließlich möchte ich noch eines bemerken. Wenn man die Axiome der Gruppe V. (Unendlichkeit) fortläßt, so reichen die übrig bleibenden Axiome zur Begründung der Theorie der endlichen Zahlen aus; ja selbst die Theorie der reellen Zahlen wird im reduziertem Umfange möglich: Sie sind unendliche Bereiche, also keine Mengen (I. II. Dinge). Man erhält eine Mathematik, in der die Theorie der reellen Zahlen auf Grund der Fundamentalfolgen möglich ist, die Konvergenzsätze für Folgen und Reihen gelten, die Theorie der stetigen Funktionen, die Algebra, Analysis, und das *Riemann*sche Integral möglich sind. Sinnlos hingegen wird der *Weierstraß*sche Satz von der oberen Grenze (für Zahlenmengen, nicht Folgen), da Mengen aus II. Dingen unmöglich sind, ferner der allgemeine Funktionsbegriff die Wohlordnung des Kontinuums, das *Lebesgue*sche Integral.

Da man es hierbei nur mit endlichen Mengen zu tun hat (alle I. II. Dinge sind ja endlich), so kann man hierfür ein Modell angeben. $\Phi(x\ y)$ muß so gewählt werden, daß man alle Funktionen, die nur für endlich viele Zahlen $\neq 1$ sind, darstellen kann, z. B.:

Die Primzahlen seien der Größe nach geordnet:

$$p_1, p_2, \ldots$$

Wenn $x = \prod_{n=0}^{\infty} p_n^{a_n}$ ist (alle $a \geq 0$, nur endlich viele > 0), so ist

$$f(xy) = a_y + 1.$$

Die Wahl des Φ ist dann leicht, man hat nur konstruktive Bedingungen (in diesem Falle ist nämlich IV. 2. automatisch erfüllt, die Kollision der beiden, obenerwähnten Grenzen für Φ findet nicht statt), wie man ziemlich leicht einsehen kann.

Man erhält so, als weiteren Beleg dafür, was im § 3 von der Abzählbarkeit gesagt wurde, ein abzählbares Modell für eine Pseudo-Mathematik, die mit der „wirklichen“ in einem großen Teile der wesentlichen Punkte übereinstimmt. Für die „große“ Mengenlehre ist zwar das Modell unbekannt, aber es muß auch hier existieren, falls eine formalistische Mengenlehre überhaupt möglich ist.

potrebbe ammettere almeno l'assioma di separazione di Zermelo (che, pure, sarebbe insufficiente per molti scopi), all'incirca nella seguente forma:

IV.2. Se b è una I.II-cosa e a è una II-cosa e se $a \subseteq b$, allora anche a è una I.II-cosa.

Questo assioma corrisponde all'assioma di separazione. Infatti, che a sia una II-cosa ha lo stesso significato che Zermelo indica con l'espressione *determinato da una proprietà definita*. Da $a \subseteq b$, dove b è una I.II-cosa, deve seguire l'ammissibilità di a, cioè che a è una I.II-cosa.

Come è facile convincersi, questo assioma, assolutamente inevitabile, potrebbe porre esattamente le stesse difficoltà di IV.2. Al cui posto deve in ogni caso esserci un assioma specificamente *impredicativo*. Che non può non porre difficoltà durante la costruzione di un modello.

Le condizioni acquisite per questa via sono tanto oscure e complicate da non potersi stabilire alcun modello e neppure dichiarare che siano innocue, sebbene, nel caso in cui la teoria degli insiemi sia possibile su basi non intuizioniste, la costruzione debba essere realizzabile.

Infine vorrei aggiungere un'osservazione ulteriore. Tralasciando gli assiomi del V gruppo (o dell'infinito), gli assiomi rimanenti sono sufficienti per fondare la teoria dei numeri finiti. La stessa teoria dei numeri reali risulta possibile nell'ambito ridotto, risultando essi classi infinite, quindi non insiemi (I.II-cose). Si ottiene una matematica in cui è possibile la teoria dei numeri reali sulla base delle successioni fondamentali, valgono i teoremi di convergenza per successioni e serie e si possono formulare la teoria delle funzioni continue, l'algebra, l'analisi e l'integrale di Riemann. Per contro perde senso il teorema di Weierstraß del confine superiore (per insiemi di numeri, non per successioni), in quanto insiemi formati da II-cose sono impossibili, per non parlare del concetto generale di funzione, del buon ordine del continuo e dell'integrale di Lebèsgue.

Avendo a che fare solo con insiemi finiti (infatti, tutte le I.II-cose sono finite), se ne può presentare un modello. $\Phi(xy)$ deve essere scelta in modo tale da poter rappresentare tutte le funzioni che solo per un numero finito di numeri sono $\neq 1$. Per esempio, siano i numeri primi ordinati per grandezza

$$p_1, p_2, \ldots$$

Se $x = \prod_{n=o}^{\infty} p_n^{a_n}$ con tutte le $a_n \geq 0$, tranne che per un numero finito $a_n > 0$, allora

$$f(xy) = a_y + 1.$$

La scelta di Φ è allora facile. Si hanno solo condizioni costruttive, come si può facilmente constatare. (In questo caso IV.2 è automaticamente soddisfatto. La coincidenza dei due limiti sopracitati per Φ non ha luogo).

Si ottiene, come ulteriore giustificazione di quanto detto nel § 3 a proposito della numerabilità, un modello numerabile di una pseudomatematica che in molti punti essenziali coincide con l'*effettiva*. Per la *grande* teoria degli insiemi, tuttavia, il

§ 5. Kategorizität.

Wir müssen nun noch untersuchen, ob unser Axiomensystem kategorisch ist, d. h. ob es das von ihm beschriebene System eindeutig bestimmt.[39] Wir wollen diesen Begriff näher beschreiben.

Es ist bekannt, daß aus den euklidischen Axiomen ohne das fünfte Postulat noch nichts über dieses fünfte Postulat folgt. D. h.: Es kann zwei Systeme geben, die beide diesen Axiomen genügen, von denen aber das erste dem genannten Postulate genügt, das zweite nicht. Im Gegensatze hierzu kann in der regelrecht axiomatisierten Geometrie so etwas niemals geschehen; ein geometrischer Satz, der in einem den geometrischen Axiomen genügenden Systeme wahr ist, ist es auch in jedem anderen. (Daß die Axiome der Geometrie letzten Endes von denen der Mengenlehre abhängen – wegen der „Stetigkeit“ –, davon wollen wir zunächst absehen.) Daß dies so ist, beruht auf dem folgenden Satze:

(Isomorphismus)

A_1, A_2 seien zwei Systeme, die den geometrischen Axiomen genügen. Es gibt dann eine ein-eindeutige Abbildung von A_1 auf A_2, bei der die den Axiomen zugrunde liegenden Beziehungen erhalten bleiben, d. h.: bei der ineinander liegende Punkte und Geraden, streckengleiche Strecken, kongruente Dreiecke usw. in ebensolche übergehen (d. h. der „Isomorphismus“).

Aus diesem leicht zu beweisendem Satze folgt offenbar: ist ein mit Hilfe dieser Grundbeziehungen formulierter Satz in $A1$, erfüllt, so ist er es auch in A_2.

Ein Axiomensystem von dieser letzteren Art, in dem ein dem angegebenen Satze analoger Isomorphismus-Satz gilt, bestimmt also die logischen Eigenschaften der von ihm beschriebener Systeme ganz eindeutig, es heißt *kategorisch.* Ist nun das System unserer Axiome derart?

Dies ist höchst wichtig. Denn wir wissen ja bloß, daß die bereits erledigten Sätze der Mengenlehre aus ihm folgen. Die unerledigten aber, z. B. das Kontinuum-Problem, könnten (wenn die Kategorizität fehlt) in einem ihnen genügenden Systeme richtig, im anderen falsch sein. D. h. es wäre überhaupt unsicher, oh diese Axiome zur Erledigung z. B. des Kontinuum-Problems hinreichen.

Daß die Axiome in der jetzigen Form viel zu weit sind, um kategorisch zu sein, ist klar; wir wissen ja z. B. nicht, ob es I. Dinge gibt, die keine I. II. Dinge sind; ob A und B Mengen sind; ob (A B) = A oder $\neq A$ ist; usw. Dem ist aber leicht abzuhelfen. Wir verlangen (man kann zeigen, daß diese Axiome keine Widersprüche erzeugen, falls die früheren widerspruchsfrei waren):

VI. 1. Alle I. Dinge sind I. II. Dinge. (IV. l. wird hierdurch überflüssig.)
2. Es ist $A = O$, R = (O). (O ist die Menge ohne Elemente, (O) enthält nur O.)
3. Es ist $(u, v) = ((u, v), (u))$. $((\alpha,\beta)$ ist die Menge mit den Elementen α, β. Aus

[39] Der Begriff der „Kategorizität“ stammt von *O. Veblen* (Transactions of the American math. Society 5, 1914, S. 346).

$((u_1, v_1), (u_1)) = ((u_2, v_2), (u_2))$ folgt, wie man leicht zeigt $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$.)

modello resta sconosciuto. Ma anche in questo caso deve esistere, se è vero che è possibile una teoria degli insiemi formalistica.

§ 5. Categoricità

Ora ci resta da verificare se il nostro sistema assiomatico sia categorico, cioè, se determina univocamente il sistema che descrive.[40] Vediamo il concetto più da vicino.

È noto che dagli assiomi euclidei privi del quinto postulato non segue nulla che lo riguardi. Ciò significa che si possono dare due sistemi, entrambi soddisfacenti gli assiomi, di cui il primo soddisfa il suddetto postulato e il secondo no. Per contro, nella geometria regolarmente assiomatizzata una cosa del genere non può mai accadere. Un enunciato geometrico vero in un sistema che soddisfa gli assiomi geometrici è vero in ogni altro sistema. (In quanto segue prescinderemo dal fatto che in ultima analisi gli assiomi della geometria, per via della *continuità*, dipendono da quelli della teoria degli insiemi). Che sia così, dipende dal seguente enunciato.

(Isomorfismo)

Siano A_1, A_2 due sistemi che soddisfano gli assiomi geometrici. Esiste allora un'applicazione biunivoca di A_1 su A_2, la quale conserva i rapporti che stanno alla base degli assiomi, attraverso la quale, cioè, punti e rette coincidenti, intervalli equivalenti, triangoli congruenti ecc. passano in punti e rette coincidenti, intervalli equivalenti, triangoli congruenti ecc. Questo è l'*isomorfismo*.

Dal teorema facilmente dimostrabile segue che, se un enunciato formulato con l'aiuto delle relazioni di base è soddisfatto in A_1, allora lo è anche in A_2.

Un sistema di assiomi dell'ultimo tipo, in cui vale un teorema di isomorfismo analogo a quello dato, determina, quindi, in modo affatto univoco le proprietà logiche del sistema che descrive. Perciò si chiama *categorico*. È categorico il nostro sistema?

Che lo sia è della massima importanza. Infatti, per ora sappiamo solo che da esso derivano i teoremi già consolidati della teoria degli insiemi. Quelli ancora da consolidare, però, come il problema del continuo, nel caso in cui mancasse la categoricità, potrebbero essere veri in un certo sistema soddisfacente gli assiomi e falsi in un altro. Detto altrimenti, non ci sarebbe certezza che gli assiomi siano sufficienti a dirimere una volta per tutte problemi come quelli del continuo.[41]

Nella forma attuale, è chiaro, gli assiomi sono ben lungi dall'essere categorici. Non sappiamo neppure, per esempio, se esista una I-cosa che non sia una I.II-cosa, se A e B siano insiemi, se $(A,B) = A$ o $\neq A$ ecc. A ciò si rimedia facilmente. Richiediamo, e si può dimostrare che le nostre richieste non producono contraddizioni, se già le precedenti condizioni non sono contraddittorie, quanto segue:

VI.1. Tutte le I-cose sono I.II-cose. (Ciò rende superfluo IV.1).

---

[40] Il termine di *categoricità* proviene da O. VEBLEN (*Trans. Am. Math. Soc.* 5, 1914, p. 346).

[41] Il problema del continuo consiste nel determinare, se esiste, la potenza intermedia tra il numerabile e il continuo. Cantor congetturò l'inesistenza di siffatta potenza (un po' come non esistono numeri interi tra zero e uno). Come oggi si sa la congettura di Cantor non è né giusta né sbagliata. Nel 1963, P.J. Cohen, dimostrando l'indipendenza della congettura di Cantor dagli assiomi del sistema di Zermelo-Fraenkel, confermò le lungimiranti preoccupazioni di von Neumann. [N.d.T.]

Ein weiteres Hindernis, auf welches bereits im Kapitel 1. hingewiesen wurde, die Möglichkeit der Existenz „unerreichbarer" Mengen, wie z. B. die „absteigenden Mengenfolgen" (siehe § l.) können wir auch ausschalten. Wir haben im § 1 die Motive auseinandergesetzt, die es unmöglich machen dies direkt durch ein „Beschränktheitsaxiom" zu erreichen. Es genügt aber formal auch das Ausschließen der „absteigenden Mengenfolgen" (auf den Beweis gehen wir hier nicht ein). Also:

4. Es gibt kein II. Ding a mit der folgenden Eigenschaft:
Es ist für jede endliche Ordnungszahl (d. h. ganze Zahl) n $[a, n+1] \in [a, n]$.

(Auch hier kann gezeigt werden, daß dieses Axiom VI. 4. keine neuen Widersprüche erzeugen kann. – Eigentlich wäre noch eine weitere Quelle der Nicht-Kategorizität auszuschalten, nämlich die vielleicht mögliche Existenz von sog. regulären Anfangszahlen mit Limes-Index. Dies führt aber zu sehr ins Gebiet der speziellen Mengenlehre, um hier behandelt zu werden; obendrein kann auch diese Schwierigkeit beseitigt werden.)

Nun ist aber unser Axiomensystem auch nach der Hinzunahme dieser Axiomengruppe VI. in Wirklichkeit höchstwahrscheinlich immer noch nicht kategorisch; die Konstruktion der erforderlichen isomorphen Abbildung zweier den Axiomen genügenden Systeme Σ_1, Σ_2 auf einander gelingt trotz alledem nicht. Sie scheitert im wesentlichen an dem Umstande, daß das Axiom VI. 4. nicht alle „absteigenden Mengenfolgen" ausschließt, sondern nur die, die die Normalform der Folgen im System Σ_1, (bzw. Σ_2) $[a\ 1\ ]$, $[a\ 2]$, $[a\ 3]$, ... (a ein II. Ding in Σ_1, bzw. Σ_2.) haben. Dann können aber natürlich noch immer welche „außerhalb des Systems" übrigbleiben. Im Interesse der isomorphen Abbildung müßte man auch diese verbieten, d. h. wieder zu einein Systeme P, das „höher" als beide Systeme Σ_1, Σ_2 ist, greifen. Und das ist bei dem Axiome VI. 4., das sich auf Σ_1 zw. Σ_2, *allein* zu beziehen hat, unmöglich.

Nach alledem scheint also überhaupt keine kategorische Axiomatisierung der Mengenlehre zu existieren; denn die Schwierigkeit mit dem Beschränktheitsaxiom und den „höheren" Systemen wird wohl keine Axiomatik vermeiden können. Und da es kein Axiomensystem für Mathematik, Geometrie, usw. gibt, das nicht die Mengenlehre voraussetzte, so wird es wohl überhaupt keine kategorisch axiomatisierten unendlichen Systeme geben. Dieser Umstand scheint mir ein Argument für den Intuitionismus zu sein.

Im Anschluß an die Kategorizitätsfrage sei noch das folgende erwähnt. Es seien zwei Systeme Σ_1, Σ_2 gegeben, a_1, a_2 seien Mengen in ihnen; und die Elemente von a_1 in Σ_1 seien genau dieselben wie die Elemente von a_2 in Σ_2. Wir wissen, daß es dann sehr wohl geschehen kann, daß a_1 in Σ_1 unabzählbar ist, aber a_2 in Σ_2 nicht (nämlich wenn Σ_2 „höher" als Σ_1 ist). Es ist aber vielleicht sogar auch mit der Endlichkeit so. Die Definition der Endlichkeit ist jedenfalls infolge des Auftretens des Begriffes „alle" und „es gibt" in bezug auf das ganze System (Σ_1 bzw. Σ_2) derartig, daß man nichts Bestimmtes sagen kann[42]. Ebenso steht es mit der Wohlordnung. Man at also die Relativität der Mächtigkeiten

[42] Die Endlichkeit kann z. B. folgendermaßen definiert werden: a sei ein Bereich. a heißt endlich, wenn es keinen Bereich b gibt, der die folgenden Eigenschaften besitzt: b hat Elemente die $\leq a$ sind. Wenn x ein Element $\leq a$ von b ist, so hat b auch Elemente, die $\leq a$ und dabei $< x$ sind.

2. È $A = \varnothing$ e $B = \{\varnothing\}$. ($\varnothing$ è l'insieme senza elementi.[43] $\{\varnothing\}$ contiene solo $\varnothing$).

3. $\{u, v\}$[44] = $\{\{u, v\}, \{u\}\}$ ($\{\alpha,\beta\}$ è l'insieme di elementi α e β. Da $\{\{u_1, v_1\}, \{u_1\}\} = \{\{u_2, v_2\}, \{u_2\}\}$ segue facilmente $u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$).

Si può eliminare anche un ulteriore ostacolo, a cui si è già accennato nel cap. 1, ossia la possibilità che esistano insiemi *irraggiungibili*, come, per es., le *successioni discendenti di insiemi* (cfr. § 1). Nel § 1 abbiamo chiarito i motivi per cui è impossibile ottenere direttamente questo risultato mediante un *assioma di restrizione*.[45] Tuttavia, è sufficiente anche escludere formalmente le *successioni discendenti di insiemi* (nella cui dimostrazione non entriamo in questa sede):

4. Non esiste una II-cosa con la seguente proprietà: Per ogni ordinale finito (cioè per ogni numero intero), $[\alpha, n + 1] \in [\alpha, n]$.

(Anche in questo caso si può segnalare che l'assioma VI.4 non produce nuove contraddizioni. Propriamente andrebbe eliminata ancora un'altra fonte di non categoricità e, cioè, la possibile esistenza dei cosiddetti numeri regolari iniziali limite. Ma ci addentreremmo troppo nel campo della teoria speciale degli insiemi per poterlo trattare qui. D'altra parte anche questa difficoltà può essere messa da parte).

Tuttavia, anche dopo l'inclusione degli assiomi del gruppo VI, il nostro sistema di assiomi è ancora assai verosimilmente non categorico. Nonostante tutto, la costruzione della richiesta applicazione isomorfa di due sistemi Σ_1, Σ_2 che soddisfano gli assiomi l'uno sull'altro non riesce. Fallisce essenzialmente per il fatto che l'assioma VI.4 non esclude tutte le successioni discendenti di insiemi ma solo quelle che in Σ_1 (rispettivamente in Σ_2) hanno la forma normale $[a\ 1]$, $[a\ 2]$, $[a\ 3]$, ... (con a II-cosa in Σ_1, rispettivamente in Σ_2). Allora, in modo naturale, possono residuare certe successioni *fuori sistema*. Nell'interesse dell'applicazione isomorfa si dovrebbero vietare anche queste. Ciò significa ricorrere di nuovo a un sistema *P*, *superiore* a entrambi Σ_1, Σ_2.. E questo è impossibile per l'assioma VI.4 che si riferisce *solo* a Σ_1, rispettivamente a Σ_2.

Dopo tutto, sembra che l'assiomatizzazione categorica della teoria degli insiemi non esista. Infatti, le difficoltà connesse con l'assioma di restrizione e con i sistemi *superiori*, nessuna assiomatica può evitarle del tutto. E dato che un sistema di assiomi per la matematica, la geometria, ecc. che non assuma la teoria degli insiemi come precondizione, non esisterebbero sistemi infiniti categoricamente assiomatizzati. Questa circostanza sembra un argomento a favore dell'intuizionismo.

In merito alla questione della categoricità va ancora detto quanto segue. Siano due sistemi Σ_1, Σ_2 e siano a_1, a_2 due loro insiemi tali che gli elementi di a_1 in Σ_1 siano esattamente gli stessi degli elementi a_2 in Σ_2. Sappiamo che può facilmente succedere

[43] Il simbolo originale di von Neumann è *O*. [N.d.T.]

[44] Come si sa, le notazioni moderne per indicare la coppia ordinata sono < . , . > o (. , .). Ma non abbiamo voluto "correggere" troppo. [N.d.T.]

[45] Oggi non si parla più di assiomi di *restrizione* ma di *fondazione* (COHEN, 1963) o di *regolarità* (MIRIMANOFF, 1917, VON NEUMANN, 1929 e ZERMELO, 1930), i quali affermano l'esistenza di elementi minimali rispetto alla relazione di appartenenza a insiemi non vuoti. Di fatto, si esclude l'autoappartenenza. [N.d.T.]

nicht nur nach oben (vom Abzählbaren) hin in Betracht zu ziehen, (siehe Kapitel 3), sondern auch nach unten hin (im Endlichen). Elementare Begriffe, wie Endlichkeit und Wohlordnung, hängen jedenfalls vom gewählten System ab (Σ_1, oder Σ_2) ab; und es ist nicht ausgeschlossen, daß dieses Abhängen von wesentlichem Charakter ist: daß eine Menge a im Systeme Σ_1 wohlgeordnet (bzw. endlich) zu sein scheint und sich im „feineren" Systeme Σ_2 als nicht wohlgeordnet (bzw. unendlich) herausstellt, bloß weil ein Teil b von ihm, der kein erstes Element hat, im Systeme Σ_1 keine Menge war, also dort nicht bemerkt wurde, es aber im Systeme Σ_2 ist. (Analog bei der Endlichkeit).

Ja letzten Endes wäre es denkbar, daß *ein jedes* System Σ_1 noch derart „verfeinert" werden kann, daß sich endliche (bzw. wohlgeordnete) Mengen als unendlich (bzw. nicht wohlgeordnet herausstellen. (Bei der Unabzählbarkeit ist ja das sicherlich der Fall.). Dann bliebe auch vom Begriffe der Endlichkeit (ebenso wie von dem der Unabzählbarkeit) nichts als die formale Einkleidung übrig. Es ist schwer zu sagen, gegen was das mehr sprechen würde; gegen den vom Intuitionismus verfochtenen anschaulichen Charakter der Endlichkeit oder gegen ihre durch die Mengenlehre gegebene Formalisierung.

Es ist eigentlich ein Einwand gegen beide: tritt doch hier eine neue Schwierigkeit auf , die von den durch *Russel* und *Brouwer* angedeuteten wesentlich verschieden ist. Das abzählbar Unendliche als solches ist unanfechtbar: es ist ja nichts weiter als der allgemeine Begriff der positiven ganzen Zahl, auf dem die Mathematik beruht und von dem selbst *Kronecker* und *Brouwer* zugeben, daß er von „Gott geschaffen" sei. Aber seine Grenzen scheinen sehr verschwommen und ohne anschaulich-inhaltliche Bedeutung zu sein. Nach oben hin, im „Unabzählbaren", ist dies nach *Löwenheims* und *Skolems* Untersuchungen ganz sicher; nach unten hin, im „endlichen", ist es zumindest sehr plausibel: fehlt doch die Kategorizität sowie jeder Anhaltspunkt für die Bestimmtheit der Definition des „Endlichen". Außerdem *sind hier auch die Hilbertschen Ansätze machtlos*: denn dieser Einwand betrifft nicht die Widerspruchsfreiheit, sondern die – Eindeutigkeit (Kategorizität) der Mengenlehre.

Wir können zunächst nicht mehr tun als feststellen, daß hier ein weiteres Bedenken gegen die Mengenlehre vorliegt und daß vorläufig kein Weg der Rehabilitation bekannt ist.

che a_1 sia non numerabile in Σ_1 e non a_2 in Σ_2 (per esempio, quando Σ_2 è *superiore* a Σ_1). È quasi lo stesso con la finitezza. In ogni caso la definizione di finitezza, a causa della comparsa di termini come *tutti* ed *esiste*, è in rapporto all'intero sistema (Σ_1, rispettivamente Σ_2) a tal punto che non si può dire nulla di determinato.[46] La stessa cosa capita con il buon ordine. Va considerata non solo la relatività delle potenze verso l'alto (partendo dal numerabile) (cfr. § 3) ma anche verso il basso (nel finito). Concetti elementari come finitezza e buon ordine dipendono in ogni caso dal sistema scelto (Σ_1 o Σ_2), senza escludere che tale dipendenza abbia carattere essenziale. Un insieme *a*, che in un sistema Σ_1 sembra bene ordinato (rispettivamente finito), in un sistema *più fine* Σ_2 può risultare non bene ordinato (rispettivamente infinito) solo perché una sua parte *b* priva di primo elemento non è un insieme in Σ_1, quindi vi rimane senza notazione, mentre nel sistema Σ_2 lo è. (Analogamente per la finitezza).

Da ultimo si potrebbe pensare che ciascun sistema Σ_1 possa essere *raffinato* al punto tale che insiemi finiti (rispettivamente bene ordinati) risultino infiniti (rispettivamente non bene ordinati. (È questo di sicuro già il caso della numerabilità). Allora del concetto di finitezza, come di quello di non numerabilità, non rimarrebbe altro che il rivestimento formale. È difficile dire contro cosa ciò depone maggiormente: contro il carattere della finitezza preteso intuitivo dall'intuizionismo o contro la sua formalizzazione data dalla teoria degli insiemi.

Propriamente è un'obiezione contro entrambe. Entra in scena qui una nuova difficoltà, essenzialmente diversa da quelle accennate da Russell e Brouwer. In quanto tale l'infinito numerabile è incontestabile. Non è niente di più del concetto generale di numero intero positivo su cui poggia la matematica, riconosciuto dagli stessi Kronecker e Brouwer come *creato da Dio*. Ma i suoi confini sembrano molto sfumati e privi di un contenuto di significato. Dopo le ricerche di Löwenheim e Skolem, il fatto è abbastanza accertato verso l'alto, nel *non numerabile*. Verso il basso, nel *finito,* sembra per lo meno plausibile. Manca, dunque, la categoricità e ogni appiglio per la determinatezza della definizione di *finito*. D'altra parte *anche le impostazioni hilbertiane* (*Hilbertschen Ansätze*) *sono in questo caso impotenti*,[47] in quanto l'obiezione non è diretta alla non contraddittorietà ma all'univocità (categoricità) della teoria degli insiemi.

Per ora non possiamo far nulla di più che verificare l'esistenza di un'ulteriore considerazione contro la teoria degli insiemi e concludere che per ora non è nota alcuna via di riabilitazione.

(Traduzione dal tedesco di Antonello Sciacchitano.
Revisione di Raffaele Angelini.
Milano, luglio 1999).

---

[46] La finitezza si può, per esempio, definire nel modo seguente. Sia *a* un dominio. Si dice che *a* è finito se non esiste un dominio *b* con questa proprietà: *b* abbia elementi $\leq a$. Se un elemento *x* di *b* è $\leq a$, allora *b* possiede elementi che sono $\leq a$ e contemporaneamente $< x$.

[47] Sottolineato nel testo. A quale specifica opera di Hilbert si riferisce l'A.? Angelini avanza una congettura: prima ancora dei numerosi scritti fondazionali, pubblicati a partire dal 1899 con le giustamente famose *Grundlagen der Geometrie*, si tratterebbe dello *Zahlbericht*, progettato insieme a Minkowski nel 1893 ma portato avanti dal solo Hilbert, che doveva essere noto a von Neumann come modello, per decenni insuperato, di *impostazione* matematica. [N.d.T.]

Cosa abbiamo letto?

> Introducendola a questo punto, la categoria degli insiemi ci trova concordi nell'evitare o depurare le implicazioni della totalità. Ma non per dire che i suoi elementi non sono isolati né sommabili; almeno, se cerchiamo nella nozione di insieme la garanzia che ha nella teoria matematica. Allora, "che le sue parti siano strutturate" significa che sono suscettibili di simbolizzare tutte le relazioni definibili per l'insieme, ben oltre la distinzione e la riunione, per altro inaugurali. In effetti, gli elementi vi si definiscono grazie alla possibilità di essere posti in funzione di sottoinsiemi, non diversamente da qualunque altra relazione definita per l'insieme. Possibilità il cui tratto essenziale è di non essere limitata da alcuna gerarchia naturale.
>
> J. Lacan, *Ecrits*, p. 648.

Che senso ha proporre un testo assai tecnico riguardante la teoria degli insiemi, vecchio ormai di settantacinque anni, di un autore di popolarità affermata per altri meriti, alla cui consolidata fortuna nulla può aggiungere un titolo altamente teorico ed essenzialmente decostruttivo come *Un'assiomatizzazione della teoria degli insiemi*? Chi non conosce il von Neumann della teoria dei giochi, della fisica quantistica, costruttore delle prime macchine calcolatrici elettroniche, morto di leucemia (probabilmente per esposizione a radiazioni atomiche) mentre si apprestava a disegnare la mappa del cervello umano? Probabilmente è lo stesso che non ne conosce le attività di consulente dell'aviazione americana e membro influente del tristemente famoso comitato per l'energia atomica, dove sosteneva la posizione di "falco". Nel quadro polimorfo delle attività intellettuali del nostro sembra male collocarsi l'immagine di von Neumann, giovane teorico degli insiemi. E c'è da chiedersi che interessi possa risvegliare oggi la sua assiomatizzazione insiemistica nei distratti utenti dei moderni computer, che hanno da tempo dimenticato la crisi delle antinomie insiemistiche e della teoria degli insiemi utilizzano una minima e trascurabile parte, quella riconducibile alla logica booleana, binaria quanto i bit che corrono nelle memorie dei loro attrezzi di telecalcolo.

Senza approfondire troppo la questione, scavando nei recessi della psicologia del profondo o grufolando nelle banalità della sociologia della scienza, per dare una prima e vaga idea delle ragioni che hanno spinto l'analista ad aprire un testo che dormiva il giusto sonno archivistico, proponiamo una serie di associazioni temporali tra manifestazioni del soggetto della scienza, già adulto, e i primi vagiti di quello dell'inconscio. Saranno coincidenze casuali? La domanda è, più che lecita, benvenuta, in quanto inaugura un discorso coraggioso che in tanti modi oggi non solo è evitato ma addirittura combattuto, sia da chi vuole ridurre la psicanalisi a psicoterapia, quindi a tecnica di manipolazione dei comportamenti umani, sia da chi, nel pio intento di rigorizzarla, vuole trasformarla in scienza della natura, quindi in procedura epistemica desoggettivata. Ma attenzione! La nostra domanda non ammette risposte oggettive, "dure" come quelle di un test statistico, perché la certezza che mette in gioco è di un altro ordine, forse oggi inattuale, precisamente soggettivo. Cerchiamo di dirne qualcosa, proponendo la seguente grossolana e parziale periodizzazione.

1890: Boltzmann misura l'entropia termodinamica;
1892: studi sull'isteria di Freud;
1895: *Brogliaccio per una psicologia scientifica* di Freud;
1897: saggi di Cantor sui numeri transfiniti;
1899: significato dei sogni di Freud;

1900: Planck propone i quanti d'azione e la discretizzazione dell'emissione energetica;
1902: antinomia di Russell della teoria degli insiemi;
1905: tre saggi sulla teoria sessuale di Freud;
1906: articolo di Einstein sull'effetto fotoelettrico; inizio della meccanica quantistica;
1906: dinamica dell'elettrone di Poincaré; inizio della relatività ristretta;
1912-13: *Totem e tabù* di Freud; verso una teoria del padre;
1915: le equazioni tensoriali della gravità di Einstein e "la strega" o la metapsicologia di Freud;
1916: relatività generale di Einstein;
1918-1920: la pandemia di spagnola fa milioni di morti;
1921: *Psicologia delle masse e analisi dell'Io* di Freud;
1925: teoria degli insiemi di von Neumann e articolo di Freud sulla negazione che non nega;
1926: sistemazione di Heisenberg e Schroedinger della meccanica quantistica;
1928: Dirac prevede l'antimateria;
1929: Fleming scopre la penicillina;
1930: *Disagio nella civiltà* di Freud e teorema di Goedel della completezza della logica predicativa;
1931: teoremi di Goedel di incompletezza dell'aritmetica;
1934-38: *L'uomo Mosè e il monoteismo* di Freud; teoria del padre, seconda versione.
Dopo l'avvento del nazifascismo la correlazione sembra indebolirsi e svanire, soprattutto per carenza di contributi psicanalitici, che si riducono a speculazioni opinabili (Fromm in testa) di tecnica psicoterapeutica, non a caso favorite dal nazismo stesso, che mirava a valorizzare la psicanalisi come psicortopedia dell'inconscio ariano. D'altra parte, i contributi scientifici vanno configurandosi come *exploit* cooperativi all'interno di quella che diventerà la *big science* americana: dalla scoperta del neutrone alle successive riscoperte del computer. Cosa resta della supposta correlazione tra scienza e psicanalisi in tempi più vicini a noi? Poco. Poco prima degli anni '60, registriamo la scoperta di Watson e Crick della doppia elica del DNA, e poco dopo la pubblicazione degli *Scritti* di Lacan. Ai nostri giorni non possiamo dire di vivere in tempi di esaltanti scoperte scientifiche (aspettiamo con ansia la conferma della "materia oscura") o di potenti innovazioni psicanalitiche. Per quanto riguarda le prime, dopo lo sbarco sulla Luna nel luglio '69, la scienza si trova al bivio: o l'archiviazione (sistemazione / elaborazione / trasmissione) accademica del sapere o l'innovazione puramente tecnologica. Tutto finito per il soggetto della scienza e del suo *alter ego* nell'inconscio? Pare di sì. Il primo è definitivamente surclassato dall'invadenza tecnologica, mentre il secondo è ultimamente ingabbiato dalle diverse forme di filisteismo psicoterapico. Nulla autorizza facili speranze di ripresa soggettivistica, dalla cultura attuale ritenuta equivalente ad arbitraria e prescientifica. In nome della tecnica, naturalmente, nel silenzio glaciale dell'accademia.
Sulla decadenza del problema della soggettività i filosofi si sono esposti prima degli psicanalisti, impegnati a convertirsi ad attività economicamente più redditizie della psicanalisi. È del 1937 il grido di dolore lanciato nelle conferenze di Husserl, registrate in *Crisi delle scienze europee*. Husserl fu un grande maestro. La strada da lui segnata è indicazione preziosa ancora oggi per chi ha a cuore le sorti del soggetto della scienza. L'insegnamento di Husserl è semplice. Se vuoi recuperare il soggetto della scienza, dice, misconosciuto in modi diversi – non sappiamo quali più deleteri – dall'idealismo tedesco (da Hegel ad Heidegger) o dal materialismo, ancora tedesco, (da Marx al neopositivismo logico), devi ripartire da Cartesio. Chi riprese le *Meditazioni cartesiane* di Husserl fu Lacan, che nel 1964 scriveva: *Le sujet, le sujet cartésien, est le présupposé de l'inconscient*..[48] La *démarche* lacaniana, tuttavia, si discosta da quella husserliana. Non mira

[48] J. LACAN, *Ecrits*, Seuil, Paris 1966, p. 839.

all'unità del soggetto trascendentale attraverso la sospensione delle certezze scientifiche cartesiane. Al contrario, mira a acuire la divisione cartesiana nella forma proposta da Freud: da una parte la verità, che parla nell'inconscio, dall'altra il sapere, che incarna la responsabilità (per lo più *a posteriori*) del parlante. Oggi entrambi i programmi, il primo, quello filosofico, più sapienziale, e il secondo, quello psicanalitico, più epistemologico, sono inattuali. E anche noi non entreremo in maggiori dettagli nei loro confronti. In quanto segue, affronteremo un solo punto, che può sembrare isolato e insignificante, ma che forse si pone all'intersezione dei due programmi e che pertanto può interessare sia filosofi sia psicanalisti. E su tale punto von Neumann ci può dare qualche indicazione.

*

In matematica sconquassò la consolidata tradizione euclidea, che religiosamente credeva in verità matematiche ideali ed eterne. In filosofia più che realmente vissuto fu annunciato dalle provocazioni del folle che dichiarava di essere convalescente della malattia metafisica. Si faceva chiamare Superuomo (o uomo non umanistico). Ma il soggetto cartesiano, abituato a navigare tra incertezze globali e certezze locali, procedendo da un particolare all'altro, senza interpellare cartografie di scala panoramica, c'era da lungo tempo preparato. Ridotto ai minimi termini, l'evento di cui stiamo parlando fu l'attraversamento dello stretto che divide i due territori epistemci classico e moderno, (realizzato anche con i buoni uffici dell'epoca di mezzo, che tenne in sospeso il problema, prima che le gracili forze del nuovo soggetto potessero sostenerne il peso). Logicamente parlando, l'evento si riduce al riconoscimento di una banalità: l'Uno non è più Tutto e il Tutto non è più Uno. O metaforicamente: l'Uno è una coperta troppo corta per il Tutto, e c'è un Tutto che non ha più nulla da coprire.
Lo si può dire in tanti modi e affrontarlo all'interno di progetti filosofici diversi. Il meno ambiguo è di Cartesio: c'è un dualismo insanabile, più radicale di quello metafisico tra le due sostanze: la *res cogitans* e la *res extensa*. Intendiamo il dualismo soggettivo tra intelletto finito e volontà infinita. Le due componenti soggettive non si unificano nell'Uno-Tutto di qualche soggetto trascendentale. Il soggetto moderno, orribile a dirsi, è diviso. Da una parte si registrano le aporie della ragion pura alle prese con l'esistenza di cose troppo grandi per lei (dio, il mondo), dall'altra l'autonomia della ragion pratica nella sua infinita capacità di errare (errore ed erranza), che nessuna massima, se non folle e superegoica, può coartare in qualche schema di comportamento predefinito. Il programma di unificazione e sintesi soggettiva, assumente il punto di vista di dio, universale e unitario, che ridicolmente certi neuroscienziati di Oltre Atlantico, insieme a certi filosofi-psicanalisti europei, insistono a riproporci, contrabbandandolo come quintessenza della scientificità o della postmodernità, teoricamente improponibile tanto quanto in pratica è attivamente propugnato dalle istituzioni scientifiche e passivamente subito dai giovani in formazione, che le frequentano, si presenta – Feyerabend *dixit* – come la nuova religione del nostro tempo, buona almeno per chi non ha conosciuto la vera religione e non ha bevuto con il latte i suoi insegnamenti e può così accontentarsi di scadenti surrogati di religiosità.

Innanzitutto, a chi non soffre di nostalgie monistiche è dedicata la nostra ripresa di von Neumann insiemista. Il quale esordì giovanissimo (diciassette anni) come insiemista alla scuola di Hilbert con un'originale teoria degli ordinali, oggi famosi come ordinali di von Neumann. L'interesse dell'approccio neumanniano è dato dalla possibilità di reinterpretare l'inclusione in termini di appartenenza e di ricondurre l'esistenza generica, garantita dalla seconda (si esiste perché si appartiene), all'esistenza particolare proposta dalla prima: si esiste perché si è incardinati in un particolare ordinamento. Il testo qui presentato (*Eine Axiomatisierung der Mengenlehre* o *Una assiomatizzazione della teoria degli insiemi*) è di fatto la sua tesi di laurea. Von Neumann conclude la sua carriera di insiemista nel '28, a venticinque anni, con *"Die" Axiomatisierung der Mengenlehre* (*"La" assiomatizzazione*

della teoria degli insiemi), emigrando in America a causa delle persecuzioni razziali. La fiaccola passerà a Goedel e Bernays, che miglioreranno la sua formalizzazione, dandole una veste accademica e propriamente insiemistica. L'impressione che se ne ha è che il giovane matematico abbia visto nella teoria degli insiemi un punto di orrore, che non vorrà più riprendere, anzi vorrà attivamente dimenticare, dedicandosi a tutt'altro: alla teoria dei giochi, alla fisica quantistica, alla geometria dei reticoli, ai computer. Come i suoi colleghi, del resto. La teoria di von Neumann risulterà nel tempo meno gettonata della rivale di Zermelo e Fraenkel, benché più elegante e più generale. Per quanto ne sappiamo, fu usata solo da Goedel per dimostrare la non contraddittorietà dell'ipotesi del continuo di Cantor e da Cohen per dimostrarne l'indipendenza dagli assiomi di Zermelo e Fraenkel. Che nome dare a simile orrore?
Viene in mente una serie di casi omologhi. Ne citiamo solo due: Newton ed Einstein.
Newton inventò il calcolo infinitesimale, generalizzando la formula del binomio. Ma, poiché la generalizzazione ricorreva al passaggio al limite per n tendente all'infinito, Newton non si sentiva sicuro della propria invenzione. Per presentare ai dotti del suo tempo, ancora fissamente euclidei, la propria legge di gravitazione universale, che giustificava le leggi di Keplero, Newton ricorse a un'ingegnosa, tanto elegante quanto oziosa nonché incompleta,[49] dimostrazione di geometria euclidea, ricorrendo a proprietà peregrine delle coniche di Apollonio, che nessuno dei nostri studenti di ingegneria oggi conosce più. Il punto di orrore di Newton si chiamava infinito. Oggi il calcolo infinitesimale in notazione vettoriale raggiunge i risultati newtoniani in due battute.
Come già riferito, nel 1906 Einstein pubblicò un breve articolo sull'effetto fotoelettrico. Praticamente inaugurò così la meccanica quantistica, sulla scia di presupposti illustri: dalla meccanica statistica di Boltzmann (morto suicida l'anno prima) alla quantizzazione di Plank, proposta per spiegare l'emissione del corpo nero. Ma dedicò tutta la vita, polemizzando con Bohr in ogni congresso in cui si incontravano, per tentare di distruggere la propria costruzione. Con il risultato paradossale di contribuire a rafforzarla. (Come fu il caso del paradosso di Einstein-Rosen-Podolski, successivamente confermato sperimentalmente). Il chiodo fisso di Einstein era la formulazione di una teoria generale della gravità, dove la materia si dissolvesse nella curvatura dello spazio e la fisica ritornasse a essere geometria, benché non euclidea. (Curiosamente, per quanto riguarda la teoria ristretta della relatività la paternità non va attribuita ad Einstein ma, per poche settimane, a Poincaré). Il punto di orrore di Einstein si chiamava indeterminismo. "Dio non gioca a dadi", era il motto di Einstein. Il quale aveva ancora bisogno della stampella di dio per rifiutare una figura fondamentale dell'episteme moderna: il caso e la probabilità.. Il soggetto moderno della scienza sa come passare dall'incertezza alla certezza, via il calcolo delle probabilità. Ma Einstein non sapeva concepire una fisica probabilistica, in senso ontologico e non solo epistemologico, certa in media, incerta nella singola misurazione, allo stesso modo in cui Aristotele non sapeva concepire un moto senza causa, per esempio inerziale. Entrambi, Einstein e Aristotele, sono giocati dallo stesso "sintomo" o meglio dalla stessa "inibizione": non saper rinunciare all'Uno che unifica il Tutto, la causa in Aristotele, il determinismo in Einstein.
E in von Neumann? Nel giovane matematico ungherese, che condividerà con Einstein la *leadership* culturale dell'Institute for Advanced Studies di Princeton, giocava una preoccupazione simile. Ma il caso di von Neumann getta una luce meno indiretta sulla struttura della moderna soggettività, individuando una "causa" più precisa di *faiblesse*, oggi per altro molto comune.
Alla fine del testo qui presentato von Neumann si lascia andare a una forma di pessimismo che sembra un giudizio di condanna. La teoria degli insiemi è insanabile perché non è categorica. Al giudizio von Neumann arriva dopo una faticosa analisi dei "sistemi parziali",

[49] Cfr. la monografia su Newton di N. Guicciardini, pubblicata da "Le Scienze", 1998.

che aprono la prospettiva di teorie non euclidee, cioè teorie definitivamente non unitarie e – questo è l'osso che rimaneva di traverso – destinate a rimanere essenzialmente parziali. Insomma la teoria degli insiemi si presentava al giovane matematico come "non tutta", con tutto il fascino di attrazione-repulsione che può esercitare una donna sul giovane uomo. Infatti, proprio questo voleva dire la non categoricità: l'esistenza di modelli della teoria non equivalenti, ognuno dei quali presenta un aspetto della struttura insiemistica non messo in luce da altri, perdendo quel che gli altri presentano.

E pensare che lo stesso von Neumann nella prima assiomatizzazione aveva contribuito a definire la nozione che in seguito sarà detta "classe propria" e anticipa in forma astratta ("astratta" non è una parolaccia) i grandi teoremi di Goedel e Tarski di incompletezza sintattica e semantica di sistemi tanto potenti quanto l'aritmetica e riproduce da vicino il comportamento concettuale della più vaga nozione di "non tutto", proposta dall'ultimo Lacan negli anni Settanta. La classe propria, nel linguaggio del testo qui presentato, non è predicabile come un Tutto con certe caratteristiche definitive. La classe propria è tale perché non può essere ridotta a elemento di un'altra classe. La classe propria è un "non tutto": manca dell'uno che la unifica come Uno-Tutto. Il Tutto non decade definitivamente, tuttavia. Resta circoscritto agli insiemi, che sono collezioni riconducibili all'unità e quindi possono appartenere, come elementi, ad altre classi. La teoria delle classi proprie e degli insiemi si preannuncia non unificabile, quasi come la fisica moderna, divisa tra quantistica e relatività; quasi come la metapsicologia, divisa tra desiderio e pulsione. Il punto di orrore di von Neumann, ora possiamo dirlo, è il "non tutto" femminile, e forse più il femminile che il "non tutto". Da quello fuggì il giovane, rifugiandosi in imprese più maschili, come spesso capita, guerresche. (Invece della Legione straniera era la NASA). Senza sapere che il "non tutto" si trova dappertutto, essendo più diffuso del Tutto: non solo nel femminile, ma anche nel paterno, nel linguistico, nel matematico, per non dire nell'inconscio.

Il "non tutto" è la nostra ricchezza. L'unica forma di dovizia di cui il soggetto diviso della scienza può andare fiero. Il "non tutto" è il vero infinito, che rimane infinito perché non può essere totalizzato nell'uno. Del "non tutto" i nostalgici anticartesiani - positivisti o idealisti, non sappiamo scegliere qual è il nostro peggior nemico dalla pervicace passione monista - vorrebbero deprivarci. Hanno ragione, perché il "non tutto" è "più grande" del loro tutto, benché il nostro non sia uno e il loro sì. A loro e contro di loro dedichiamo questa ripresa di von Neumann.

*

Non vogliamo spiegare "troppo" von Neumann, introducendo più alla nostra che alla sua visione. Perciò preferiamo presentarlo a cose “lette”, *a posteriori*, abituati come siamo dall'esperienza di analisi, che è sempre più postdittiva che predittiva. Pretendiamo, infatti, che si possa leggere von Neumann in modo non ingenuo né profano, ma laico, quindi con occhio né specialistico né religioso. Perciò diamo pochissime indicazioni di lettura. Solo quel tanto necessario per riorganizzarla a cose fatte.

In questa assiomatizzazione von Neumann non formalizza gli insiemi ma le funzioni, precisando che non si perde in generalità. Le classi sono presentate come domini dove la funzione è diversa da un valore arbitrario A. La definizione, per chi ha un'infarinatura filosofica, ricorda la posizione enunciata da Spinoza nella lettera L, dove afferma che *omnis determinatio est negatio*. L'infinito è regolato dall'assioma del "più grande", di ispirazione platonica (*Teeteto*). Una classe è infinita se, per ogni elemento che le appartiene, esiste un elemento distinto, pure appartenente alla classe, più grande del precedente. Come definizione sarebbe impredicativa, presupponente, cioè, l'esistenza della classe che sta definendo. Ma giustamente l'assioma dell'infinito non è una definizione ma un assioma, cioè un principio (non importa quanto arbitrario) da cui cominciare il discorso. (Tra parentesi, oggi meno di un tempo si temono le definizioni impredicative, che si usano correntemente in topologia per definire i limiti di una classe ancora da definire. Non

producono automaticamente antinomie come una volta si supponeva per via dell'autoreferenzialità).
Infine, un'ultima precisazione sulla nozione di "troppo grande". Una classe si dice troppo grande se è almeno tanto grande, se non più grande, quanto la classe di tutti gli argomenti. Tecnicamente, se può essere applicata da qualche funzione *sulla* classe di tutti gli argomenti. Un esempio negativo, volutamente sciocco, può far intuire una nozione profonda. I numeri pari sono quelli che divisi per due danno resto diverso da uno (definizione negativa alla Spinoza). La loro classe è "troppo grande"? Verifichiamo se tutti gli argomenti possono essere etichettati come pari o, come si dice, se ogni argomento è immagine di un pari per qualche funzione. Poiché ci sono più argomenti che pari, tra cui molti argomenti che riguardano i pari ma non sono divisibili per due (per esempio, perché sono rappresentati da espansioni "numeriche" infinitamente lunghe), concludiamo che i numeri pari non formano una classe propria ma un insieme. I pari restano al di qua dell'abisso del non argomentabile. Abisso che lasciamo agli psicanalisti da esplorare come ulteriore punto di orrore dell'epoca scientifica, oltre all'infinito e alla femminilità. Che nome dargli? Parafrasando Bunuel, "il fantasma della soggettività".