David Hilbert
Sull'infinito[1]

in Carlo Cellucci, *La filosofia della matematica,* Laterza, Bari 1967

Con le sue penetranti critiche Weierstrass ha fornito un solido fondamento all'analisi classica. Chiarendo molte nozioni, in particolare quelle di minimo, di funzione e di quoziente differenziale, ha eliminato i difetti ancora presenti nel calcolo infinitesimale, lo ha liberato da ogni confusione relativa all'infinitesimale, risolvendo così completamente le difficoltà derivanti da tale concetto. Se oggi in analisi c'è accordo completo e sicurezza nell'impiego dei metodi deduttivi basati sui concetti di numero irrazionale e di limite, e se si è unanimi sui risultati raggiunti anche nelle questioni più complesse della teoria delle equazioni differenziali ed integrali, nonostante l'uso delle più ingegnose e varie combinazioni di composizioni, giustapposizioni e incastri di limiti, tutto ciò è merito soprattutto dell'opera scientifica di Weierstrass. Tuttavia, malgrado la fondazione del calcolo infinitesimale fornita da Weierstrass, proseguono le dispute sui fondamenti dell'analisi.

Tali dispute non sono cessate perché il significato dell'"infinito", nel senso in cui tale concetto è usato in matematica, non è mai stato chiarito completamente. È vero che l'analisi di Weierstrass ha eliminato l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo, riducendo ogni affermazione su di essi [162] all'affermazione su relazioni tra grandezze finite. Tuttavia, l'infinito compare ancora nella serie numerica infinita che definisce i numeri reali e nel concetto di sistema dei numeri reali, considerato come una totalità attualmente esistente.

Nella sua fondazione dell'analisi, Weierstrass accettò senza riserve ed adoperò ripetutamente forme di deduzione logica in cui entra il concetto di infinito, come quando si considerano tutti i numeri reali che hanno una certa proprietà o si afferma che esistono numeri reali che hanno una certa proprietà.

L'infinito perciò ricompare nella teoria di Weierstrass per un'altra via, sfuggendo così all'esigenza di precisione imposta dalla sua critica. Occorre quindi risolvere una volta per tutte il problema dell'infinito, nel senso ora indicato. Proprio come nei procedimenti di passaggio al limite del calcolo infinitesimale l'infinito, nel senso del1'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo, si è rivelato semplicemente un mo4o di dire, nello stesso modo dobbiamo renderci conto che l'infinito, nel senso di una totalità infinita, dove è ancora usato nei metodi deduttivi, è un'illusione. Proprio come le operazioni sull'infinitamente piccolo sono state sostituite da operazioni sul finito che danno luogo esattamente agli stessi risultati e alle stesse eleganti relazioni formali, così in generale i metodi deduttivi basati sull'infinito devono essere sostituiti con procedimenti finiti che diano gli stessi risultati, che cioè rendano possibili le stesse catene di dimostrazioni e gli stessi metodi per ottenere formule e teoremi.

Questo è lo scopo della mia teoria. Essa si propone di dare definitivamente sicurezza al metodo matematico, compito che non fu assolto neppure durante il periodo critico del calcolo infinitesimale. Essa perciò dovrebbe condurre a compimento ciò che Weierstrass sperava di fare con la sua fondazione dell'analisi e verso cui ha compiuto un passo necessario ed importante.

Per chiarire il concetto di infinito, però, occorre porsi in una prospettiva ancor più generale. Leggendo attentamente ci si accorge che la letteratura matematica è piena di sciocchezze e di assurdità, la cui origine va ricercata nell'infinito. Per esempio alcuni sostengono, come se fosse una condizione restrittiva, che in una matematica rigorosa

[1] *Über das Unendliche*, in "Mathematische Annalen", vol. 95 (1925), pp. 161-190.

sono ammissibili solo dimostrazioni [163] con un numero *finito* di deduzioni. Come se si fosse mai riusciti ad effettuare dimostrazioni con un numero infinito di deduzioni!

Ricompaiono anche, in forma differente, vecchie obiezioni che si supponevano abbandonate da tempo. Di recente, per esempio, è ricomparsa questa: anche se si può introdurre un concetto senza rischi, cioè senza incorrere in contraddizioni, e anche se si può dimostrare che non dà luogo a contraddizioni, la sua introduzione non è perciò giustificata. Tale obiezione non coincide con quella un tempo sollevata contro i numeri complessi-immaginari, quando si diceva: «È vero, il loro uso non dà luogo a contraddizioni; tuttavia, la loro introduzione è ingiustificata poiché le grandezze immaginarie non esistono»? Se ha senso porsi il problema della giustificazione di una misura, indipendentemente dalla dimostrazione della sua coerenza, tale giustificazione non può consistere che nell'accertare se la misura sia accompagnata da un adeguato successo In effetti il successo è essenziale perché, in matematica come altrove, esso costituisce la corte suprema di fronte a cui tutti si inchinano.

Come c'è chi vede fantasmi, un autore crede di vedere contraddizioni anche là dove non esistono asserzioni, cioè nel mondo concreto della percezione, il cui "coerente funzionamento" egli considera come una particolare assunzione. Per conto mio ho sempre ritenuto che solo le asserzioni e le ipotesi, queste ultime nella misura in cui conducono, tramite deduzioni, ad asserzioni, possono essere contraddittorie. Il punto di vista secondo cui fatti ed eventi possono essere anch'essi contraddittori costituisce, a mio parere, un notevole esempio di assurdità.

Le considerazioni precedenti intendono solo affermare che la chiarificazione definitiva della natura dell'infinito non riguarda esclusivamente l'ambito degli interessi scientifici specializzati ma è necessaria per la dignità stessa dell'intelletto umano.

Da tempo immemorabile l'infinito ha suscitato le passioni umane più di ogni altra questione. E difficile trovare un'idea che abbia stimolato la mente in modo altrettanto fruttuoso; tuttavia nessun altro concetto hi più bisogno di chiarificazione.

Prima di cercare di chiarire la natura dell'infinito, considereremo brevemente quale significato gli venga attribuito attualmente. [164] Vediamo anzitutto che cosa possiamo imparare dalla fisica.

La prima ingenua impressione che si trae dagli eventi naturali e dalla materia è un'impressione di permanenza, di continuità. Se si considera un pezzo di metallo o un certo volume di liquido, si ha l'impressione che essi siano divisibili illimitatamente, che le loro più piccole parti presentino le stesse proprietà del tutto. Ma da quando si sono sufficientemente perfezionati i metodi di indagine della fisica della materia, gli scienziati hanno scoperto dei limiti di divisibilità che non dipendono dall'insufficienza dei loro sforzi ma sono nella natura stessa delle cose. Si potrebbe perciò addirittura affermare che la scienza moderna tende all'emancipazione dal l'infinitamente piccolo, e al vecchio principio *natura non facit saltus* potrebbe sostituirsi l'opposto «la natura compie dei salti».

È noto che la materia è composta di piccoli mattoni, detti 'atomi', dalla cui combinazione e connessione trae origine tutta la molteplicità degli oggetti macroscopici.

Tuttavia la fisica non si è fermata all'atomismo della materia. Alla fine del secolo scorso ha fatto la sua comparsa l'atomismo dell'elettricità che, a prima vista, sembra molto più bizzarro. L'elettricità, che fino ad allora era stata considerata un fluido ed il prototipo. degli agenti ad azione continua, si è dimostrata costituita da "elettroni" positivi e negativi.

Oltre alla materia e all'elettricità c'è in fisica un'altra entità per cui vale la legge di conservazione, cioè l'energia. Ma, come è stato stabilito, anche l'energia non ammette una divisibilità all'infinito, così semplicemente e senza restrizioni: Planck ha scoperto i "quanti di energia".

Perciò in nessuna parte della realtà si può trovare un continuo omogeneo che ammetta quel genere di divisibilità che è necessaria per ottenere l'infinitamente piccolo. La divisibilità all'infinito di un continuo è un'operazione che esiste solo nel pensiero, è semplicemente un'idea, di fatto confutata dai risul- tati dell'osservazione della natura e dagli esperimenti della fisica e della chimica.

Ci imbattiamo per la seconda volta nella questione sé l'in- finito si trovi nella natura quando studiamo l'universo nel suo [165] complesso. Dobbiamo esaminare qui l'espansione dell'universo per stabilire se essa abbracci qualche grandezza infinita.

L'idea dell'infinità del mondo predominò a lungo: fino a Kant e anche oltre non si ebbe alcun dubbio sull'infinità dello spazio.

Anche in questo caso la scienza moderna, in particolare l'astronomia, ha riproposto la questione e si sforza di risolverla non coi mezzi difettosi della speculazione metafisica ma con ragionamenti fondati sulla sperimentazione e sull'applicazione delle leggi della natura, e anche in questo caso si sono trovate serie obiezioni contro l'infinito. La geometria "euclidea" conduce necessariamente al postulato dell'infinità dello spazio, ma quantunque essa sia un sistema concettuale coerente, non ne segue che valga effettivamente nella realtà. Solo con l'osservazione e l'esperimento si può stabilire se lo spazio reale sia o meno euclideo. Il tentativo di dimostrare l'infinità dello spazio attraverso la pura speculazione contiene grossi errori. Dal fatto che al dì là di una parte dello spazio ce n'è sempre un'altra segue soltanto che lo spazio è illimitato, non ché è infinito. L'illimitatezza e la finitezza non sono incompatibili. Attraverso la cosiddetta geometria "ellittica" la ricerca matematica fornisce il modello naturale di un universo finito. Oggi l'abbandono della geometria euclidea non è più solo l'effetto di una speculazione matematica o filosofica, ma è suggerito da considerazioni che in origine non avevano nulla a che fare con la questione della finitezza dell'universo. Einstein ha dimostrato che la geometria euclidea deve essere abbandonata. Egli tratta anche le questioni cosmologiche in base alla sua teoria della gravitazione e mostra che è possibile un universo finito. Inoltre tutti i risultati dell'astronomia sono perfettamente compatibili col postulato che l'universo sia ellittico.

Si è stabilito che l'universo è finito in due sensi, cioè in quello dell'infinitamente piccolo e in quello dell'infinitamente grande. Potrebbe darsi tuttavia che l'infinito occupi un posto giustificabile *nel nostro pensiero*, e che svolga un ruolo di concetto indispensabile. Vediamo qual è la situazione in matematica, e consideriamo anzitutto il prodotto più puro e genuino dello spirito umano, la teoria dei numeri. Prendiamo una formula [166] scelta nella ricca molteplicità delle sue formule elementari, per esempio la formula:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = 1/6 \,.\, n(n + 1)(2n + 1).$$

Poiché possiamo sostituire n con un numero qualsiasi, per esempio con 2 o con 5, questa formula contiene implicitamente infinite asserzioni. Ciò costituisce la sua caratteristica essenziale, che le consente di rappresentare la soluzione di un problema aritmetico e per essere dimostrata richiede una particolare idea, mentre le singole equazioni numeriche:

$$1^2 + 2^2 = 1/6 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 1/6 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 11$$

possono essere verificate semplicemente mediante il calcolo, e perciò singolarmente non hanno particolare interesse.

Una concezione completamente diversa e del tutto singolare, che consente una fondamentale comprensione del concetto di infinito, si incontra nell'importante e fecondo metodo degli "elementi ideali". Tale metodo è usato anche nella geometria elementare del piano. I punti e le rette del piano originariamente sono degli oggetti reali effettivamente esistenti. Per essi vale, tra gli altri, l'assioma di connessione: per due punti passa una ed una sola retta. Da questo assioma segue che due rette si intersecano al massimo in un punto, ma non esiste alcun teorema il quale affermi che esse si intersecano sempre in un punto, poiché possono benissimo essere parallele. Sappiamo però che introducendo degli elementi ideali, per esempio punti all'infinito e rette prolungate all'infinito, possiamo fare in modo che il teorema secondo cui due rette si intersecano sempre in uno ed un solo punto risulti vero in generale.

Gli elementi ideali "all'infinito" hanno il vantaggio di rendere quanto più semplice e chiaro è possibile il sistema delle leggi della connessione. Inoltre, per la simmetria tra punto e retta, si ottiene l'utilissimo principio di dualità della geometria. [167]

Un altro esempio di uso degli elementi ideali è fornito dalle comuni grandezze "complesse-immaginarie" dell'algebra, che servono a semplificare teoremi riguardanti l'esistenza e il numero delle radici di un'equazione.

Come per definire un punto ideale in geometria si adoperano infinite rette (quelle parallele tra loro), così per definire un "numero ideale" nell'aritmetica superiore si adoperano certi sistemi infiniti di numeri. Questa probabilmente è l'applicazione più geniale del principio degli elementi ideali. Adoperando sistematicamente tale principio in un corpo algebrico di numeri si ottengono proprio le semplici e consuete leggi della divisione che valgono per i comuni numeri interi 1, 2, 3, 4, ... A questo punto si è già nel dominio dell'aritmetica superiore.

Passiamo ora alla struttura matematica più ingegnosa e meglio articolata, cioè l'analisi. Già sapete che l'infinito svolge in essa un ruolo essenziale. In un certo senso l'analisi matematica è una sinfonia dell'infinito.

Gli enormi progressi compiuti dal calcolo infinitesimale sono dovuti essenzialmente all'uso di sistemi matematici con un numero infinito di elementi. Poiché però sembrava plausibile identificare l'infinito con il "molto grande", sorsero ben presto delle contraddizioni, i cosiddetti paradossi del calcolo infinitesimale, che in parte erano già note agli antichi sofisti. Ma il riconoscimento che molti teoremi che valgono per il finito (per esempio il teorema secondo cui la parte è minore del tutto, l'esistenza di un minimo e un massimo, la commutatività dell'ordine dei termini di una somma o di un prodotto) non possono essere estesi immediatamente e senza restrizioni all'infinito, costituì un fondamentale passo in avanti. Ho detto all'inizio di questo articolo che tali questioni sono state completamente chiarite, grazie soprattutto alla acutezza di Weierstrass. Oggi l'analisi non solo è infallibile nel proprio ambito, ma è diventata uno strumento di pratico impiego per l'uso dell'infinito.

L'analisi da sola, però, non ci dà la migliore comprensione della natura dell'infinito. Questa si può ottenere mediante una disciplina che si accosta di più ad un modo di pensare filosofico generale, 'e che fu concepita per fare nuova luce sul complesso [168] delle questioni relative all'infinito: si tratta della teoria degli insiemi, creata da Georg Cantor. In questo articolo ci interessa solo quella parte unica ed originale di essa che costituisce il nucleo centrale della dottrina di Cantor, cioè la teoria dei ' nu- meri transfiniti '. Tale teoria è, a mio parere, il più bel risultato del genio matematico ed una delle maggiori conquiste dell'atti- vità umana puramente intellettuale. In che cosa consiste dunque?

Volendo caratterizzare in breve la nuova concezione dell'infinito introdotta da Cantor si potrebbe dire: nell'analisi ci si occupa deli' infinitamente grande e deli' infinitamente piccolo solo in quanto concetti-limite, come qualcosa che diviene, che nasce, che si forma, cioè in quanto "infiniti potenziali". Ma non è questo l'infinito vero e proprio. Che si ha invece quando si considera la totalità dei numeri 1, 2, 3, 4, ... come una totalità conclusa o si considerano i punti di un intervallo come una totalità di oggetti che esistono tutti in una volta. Questo tipo di infinito prende il nome di "infinito attuale".

Frege e Dedekind, i due matematici più famosi per il loro lavoro sui fondamenti della matematica, adoperarono, indipendentemente tra loro, l'infinito attuale per dare all'aritmetica una fondazione indipendente sia dall'intuizione che dall'esperienza, che fosse basata sulla logica pura e facesse uso di deduzioni puramente logiche. Dedekind, anzi, riuscì persino a non ricavare la nozione di numero finito dall'intuizione, ma a derivarla logicamente adoperando il concetto di insieme infinito. Ma fu Cantor che sviluppò sistematicamente il concetto di infinito attuale. Consideriamo i due esempi di infinito già menzionati:

(1) 1, 2, 3, 4, …
(2) i punti dell'intervallo 0 – 1 o equivalentemente la totalità dei numeri reali compresi tra 0 e 1.

È estremamente naturale trattare questi esempi dal punto di vista della loro grandezza, ma una trattazione dei genere rivela risultati sorprendenti, che oggi sono familiari ad ogni matematico. Se si considera, infatti, l'insieme di tutti i numeri razio-nali, cioè di tutte le frazioni ½, 1/3, 2/3, 1/4, ..., 3/7, ..., unicamente [169] dal punto di vista della sua grandezza, si dimostra che esso non è più grande dell'insieme dei numeri interi. Si dice perciò che i numeri razionali possono essere contati nel modo usuale, o che essi sono numerabili. Lo stesso vale per l'insieme di tutti i numeri che da essi si possono ottenere mediante estrazioni di radici, e in effetti per l'insieme di tutti i numeri algebrici. Il secondo esempio è analogo al primo: per quanto possa sembrare strano, l'insieme dei punti di un quadrato o di un cubo non è maggiore dell'insieme dei punti dell'intervallo 0 – 1, e così pure l'insieme delle funzioni continue. Sentendo parlare di questi risultati per la prima volta si potrebbe pensare che, dal punto di vista della grandezza, esista un unico infinito. Non è così: gli insiemi degli esempi (1) e (2) non sono, come si dice, "equipotenti". Infatti l'insieme (2) non è numerabile poiché è più grande dell'insieme (1). Si giunge in questo modo a ciò che vi è di più nuovo e peculiare nella teoria di Cantor. i punti dell'intervallo non possono essere numerati nel solito modo, cioè contando 1, 2, 3, ...! Ma poiché si ammette l'infinito attuale, non si è obbligati a fermarsi qui. Quando si sono contati 1, 2, 3, ... gli oggetti così numerati possono essere considerati un insieme infinito esistente tutto in una volta in questo ordine particolare. Se, seguendo Cantor, indichiamo con ω il tipo di tale ordine, la numerazione prosegue naturalmente con $\omega+1$, $\omega+2$,... fino a $\omega+\omega$ o $\omega.2$, poi con $\omega.2+1$, $\omega.2+2$, ..., $\omega.2+\omega = \omega.3$, e ancora con $\omega.2$, $\omega.3$, $\omega.4$, …, $\omega.\omega = \omega^2$, ω^2+1, …, di modo che alla fine si ottiene la seguente tabella:

1, 2, 3,
ω, $\omega+1$, $\omega+2$, …
$\omega.2$, $\omega.2+1$, $\omega.2+2$, …
$\omega.3$, $\omega.3+1$, $\omega.3+2$, …
ω^2, ω^2+1, …
$\omega^2+\omega$, $\omega^2+\omega.2$, $\omega^2+\omega.3$, …
$\omega^2.2$, …
$\omega^2.2+\omega$, …

ω^3, …
ω^4, …
ω^ω, … [170]

Questi sono i primi numeri transfiniti di Cantor, i numeri della seconda classe numerica, come li chiama. Arriviamo ad essi semplicemente continuando a contare al di là dell'ordinario infinito numerabile, cioè mediante una prosecuzione del tutto naturale e univocamente determinata dell'ordinario contare nel finito. Come finora si contavano, solo il primo, il secondo, il terzo, ... membro di un insieme, così ora si conteranno anche l'ω-esimo, l'ω+1-esimo, ..., l'ω^ω-esimo membro.

Dati questi sviluppi viene naturale chiedersi se, adoperando numeri transfiniti, si possano realmente contare quegli insiemi che non sono numerabili nel senso ordinario del termine.

Cantor ha sviluppato con notevole successo, in base a questi concetti, la teoria dei numeri transfiniti, e ha inventato tutto un calcolo per essi. Così, grazie alla collaborazione tra i giganti Frege, Dedekind e Cantor, l'infinito fu posto sul trono e iniziò un'era di grandi trionfi. Osando il volo, esso ha raggiunto una vertiginosa vetta di successi.

Non mancarono, tuttavia, le reazioni. Esse assunsero, in realtà, forme molto drammatiche, e furono di tipo analogo a quelle suscitate dagli sviluppi del calcolo infinitesimale. Nella gioia della scoperta di nuovi importanti risultati, i matematici si erano poco preoccupati della validità dei loro metodi deduttivi. Infatti a poco a poco cominciarono a spuntare fuori delle contraddizioni, causate semplicemente dall'uso di definizioni e di metodi deduttivi ormai abituali. Tali contraddizioni, i cosiddetti paradossi della teoria degli insiemi, sebbene inizialmente sporadiche, divennero gradualmente sempre più acute e serie. In particolare una contraddizione scoperta da Zermelo e Russell ebbe un effetto addirittura catastrofico quando divenne nota nel mondo matematico. Di fronte a questi paradossi Dedekind e Frege abbandonarono completamente i loro punti di vista e si ritirarono dalla lotta: Dedekind esitò a lungo prima di permettere la pubblicazione di una nuova edizione del suo trattato *Was sind und was sollen die Zahlen*, che a suo tempo aveva fatto epoca, e in un epilogo anche Frege dovette riconoscere che l'indirizzo del suo libro *Grundgesetze der Arithmetik* era sbagliato. La stessa teoria di Cantor fu attaccata da tutti i lati. La reazione fu così violenta che vennero messi in questione [171] anche i concetti più comuni e fecondi e i tipi di ragionamento più semplici e importanti della matematica e si voleva vietare il loro impiego.[2] Naturalmente l'antico ordine ebbe dei difensori, ma le tattiche di questi ultimi erano troppo timide ed essi non fecero mai un fronte unico nei punti vitali. Furono avanzati troppi rimedi differenti per i paradossi, ed i metodi proposti per chiarirli erano troppo disparati.

Per generale riconoscimento la nostra posizione attuale di fronte ai paradossi è insostenibile. Pensate, le definizioni e i metodi deduttivi che tutti imparano, insegnano e adoperano nella matematica, in questa pietra di paragone di ogni sicurezza e di ogni verità, conducono a delle assurdità! Dove trovare sicurezza e verità se non si trovano neppure nel pensiero matematico?[3]

C'è tuttavia un modo del tutto soddisfacente per evitare i paradossi senza tradire la nostra scienza. Il punto di vista utile per la scoperta di tale modo e il desiderio che ci mostra la via da prendere sono:

---

[2] [Il riferimento è all'intuizionismo di Brouwer.]
[3] [Si noti l'analogia con la situazione cartesiana prima della formulazione del *cogito*.]

1. Se c'è anche la più piccola speranza, esamineremo accuratamente tutte le definizioni e i metodi deduttivi fecondi, li cureremo, li potenzieremo e li renderemo utili. Nessuno potrà cacciarci dal paradiso che Cantor ha creato per noi.

2. Dobbiamo estendere a tutta la matematica quella sicurezza dei metodi dimostrativi che è propria della teoria elementare dei numeri, di cui nessuno dubita e in cui contraddizioni e paradossi sorgono solo per nostra negligenza.

Ovviamente questi risultati possono essere raggiunti solo dopo che si sia completamente chiarita la natura dell'infinito.

Si è già visto che, nella realtà, l'infinito non si trova da nessuna parte, quali che siano le esperienze, le osservazioni e le scienze a cui si fa appello. Il pensiero sulle cose può essere tanto diverso dalle cose? I processi del pensiero possono essere tanto diversi dai processi reali delle cose? In breve, il pensiero può essere così lontano dalla realtà? Non è vero piuttosto che, quando pensiamo di esserci imbattuti nell'infinito in un qualche senso reale, siamo stati indotti a pensare così semplicemente [172] dal fatto che spesso incontriamo nella realtà delle dimensioni estremamente grandi ed estremamente piccole? La deduzione logica intuitiva ci inganna forse in qualche modo e ci pianta in asso quando l'applichiamo a cose o a fatti reali? No! La deduzione logica intuitiva è indispensabile. Essa ci inganna solo quando effettuiamo definizioni arbitrarie e astratte, in particolare quelle che comportano un'infinità di oggetti. In tali casi la si adopera illegittimamente, cioè non si presta sufficiente attenzione alle condizioni indispensabili per il suo valido uso. Nel riconoscere che esistono tali condizioni, di cui occorre tener conto, ci troviamo d'accordo con i filosofi e soprattutto con Kant. Kant riteneva (ed è parte integrante della sua teoria) che la matematica avesse un oggetto dato indipendentemente dalla logica. Essa perciò non può essere basata solo sulla logica, per cui i tentativi in tal senso di Frege e di Dedekind erano destinati a fallire. Come ulteriore condizione per l'uso della deduzione logica e per l'effettuazione delle operazioni logiche, nella rappresentazione deve essere già dato qualcosa: degli oggetti extralogici concreti, che sono intuiti come esperienze immediate, anteriori a ogni attività di pensiero. Perché la deduzione logica sia sicura si devono poter esaminare tali oggetti in ogni loro aspetto, e le loro proprietà, le loro differenze, l'ordine in cui si presentano, le loro somiglianze devono essere date con essi come qualcosa che non è ulteriormente riducibile o che non richiede una riduzione. Questa è la filosofia che ritengo necessaria non solo per la matematica ma per ogni pensiero, per ogni comprensione e per ogni comunicazione che rientrano nell'ambito della scienza. In base ad essa, in particolare, oggetto della nostra considerazione matematica sono gli stessi segni concreti la cui forma, in virtù del nostro approccio, è immediatamente chiara e riconoscibile.

Consideriamo la natura e i metodi della teoria dei numeri finitista. Essa certo può essere costruita a partire da costruzioni numeriche mediante considerazioni intuitive, ma certamente la matematica non consiste solo di equazioni numeriche né può essere ridotta semplicemente a esse. Si potrebbe tuttavia affermare che la matematica è un apparato che, applicato a numeri interi, dà sempre luogo a equazioni numeriche [173] corrette. Ma anche se così fosse, resterebbe tuttavia da studiare la struttura di questo apparato per accertare se esso conduce sempre ad equazioni numeriche corrette, e per compiere questa indagine disponiamo solo dei metodi concreti intuitivi e dell'approccio finitista, che si adoperano nella costruzione della teoria dei numeri per derivare equazioni numeriche. Tale requisito scientifico può essere realmente soddisfatto, cioè si possono ottenere in modo puramente intuitivo e finitista (il modo in cui si ottengono le verità della teoria dei numeri) le informazioni che garantiscono la validità dell'apparato matematico. Consideriamo ora più da vicino la teoria dei numeri.

Nella teoria dei numeri vi sono i segni numerici:

1, 11, 111, 1111, …

dove ogni segno numerico è riconoscibile intuitivamente per il fatto che in esso il segno che segue 1 è sempre un altro 1. Tali segni numerici (che costituiscono il nostro oggetto di studio) non hanno di per sé alcun significato. Ma nella teoria dei numeri elementare ci serviamo, oltre che di essi, anche di altri segni che hanno un significato e servono a facilitare la comunicazione. Per esempio, il segno 2 è adoperato come un’abbreviazione del segno numerico 11 e il segno 3 come un’abbreviazione del segno numerico 111. Inoltre si adoperano i segni +, =, > e altri ancora per comunicare asserzioni. Così 2 + 3 = 3 + 2 intende comunicare che 2 + 3 e 3 + 2, tenuto conto delle abbreviazioni, sono uno stesso segno numerico, cioè 11111. Analogamente 3 > 2 intende comunicare che il segno 3, cioè 111, è più lungo del segno 2, cioè 11 o, in altri termini, che quest’ultimo è una parte propria del primo.

Per scopi di comunicazione adoperiamo anche le lettere **a**, **b**, **c** per i segni numerici. Perciò **b** > **a** comunica che il segno numerico **b** è più lungo del segno numerico **a**. Da questo punto di vista **a** + **b** = **b** + **a** comunica che il segno numerico **a** + **b** è lo stesso di **b** + **a**. Il contenuto di tale comunicazione può essere dimostrato anche con una deduzione intuitiva, ma questo genere di trattazione intuitiva ci porterebbe troppo lontano. [174]

Diamo ora un primo esempio del modo in cui si possono oltrepassare i limiti di questo metodo intuitivo. Il più grande numero primo attualmente noto è (39 cifre):

p = 170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727.[4]

Con un metodo ben noto, dovuto ad Euclide, si può dimostrare, rimanendo nell’ambito del nostro approccio, il teorema secondo cui tra **p** + 1 e **p**! + 1 c’è almeno un numero primo. L’enunciato del teorema è perfettamente conforme all’approccio finitista, poiché l’espressione “c’è” serve solo ad abbreviare l’asserzione: è certo che

p + 1 oppure **p** + 2 oppure **p** + 3 ... oppure **p**! + 1

è un numero primo. Inoltre, poiché essa ovviamente equivale a: c’è un numero primo che è

(1) > **p**

ed è

(2) ≤ **p**! + 1,

si giunge a formulare un teorema che esprime solo in parte il contenuto del teorema dì Euclide, cioè: c’è un numero primo > **p**. Sebbene esso sia molto più debole quanto al contenuto (poiché esprime solo in parte ciò che afferma il teorema di Euclide), e sebbene il passaggio a esso sembri del tutto innocuo, tuttavia se lo si isola dal suo contesto e lo si considera come un’asserzione a sé, il passaggio in questione comporta un salto nel transfinito. Come è possibile? Per il semplice fatto che in esso compare un’asserzione esistenziale “c’è”! È vero, sì, che qualcosa del genere compare

[4] [Il più grande primo oggi noto è il 42-esimo numero di Mersenne: $2^{25964951} - 1$. Scritto per esteso ha 7.815.230 cifre.]

anche nel teorema di Euclide, ma in quest'ultimo, come ho già accennato, "c'è" è un'abbreviazione di:

$$\text{o } \mathbf{p} + 1 \text{ oppure } \mathbf{p} + 2 \text{ oppure } \mathbf{p} + 3 \ldots \text{ oppure } \mathbf{p}! + 1$$

è un numero primo (come se, invece di "questo pezzo di gesso o quest'altro o quest'altro... o quest'altro è rosso", si dicesse brevemente: "tra questi pezzi di gesso ce n'è uno rosso"). L'asserzione che, in una totalità finita, "c'è" un oggetto con una [175] certa proprietà è perfettamente conforme col nostro approccio finitista. Invece l'alternativa:

$$\text{o } \mathbf{p} + 1 \text{ oppure } \mathbf{p} + 2 \text{ oppure } \mathbf{p} + 3 \ldots \text{ oppure } \ldots \text{ in inf.}$$

ha una certa proprietà, è per così dire una somma logica infinita, e questo passaggio all'infinito, a meno che non si forniscano ulteriori spiegazioni e non si introducano altre precauzioni, è dello stesso tipo del passaggio, nell'analisi, da un prodotto finito ad un prodotto infinito, ed è perciò in generale un nonsenso.

Dal punto di vista finitista un'asserzione esistenziale della forma, "c'è" un numero con una certa proprietà', in generale ha senso solo come asserzione parziale, cioè come parte di un'asserzione più precisa il cui esatto contenuto, tuttavia, non è necessario in molti casi.

Nell'analizzare un'asserzione esistenziale, che non può essere espressa come una alternativa finita, ci si imbatte nel transfinito. Analogamente se si nega un'asserzione generale, cioè un'asserzione relativa a segni numerici qualsiasi, si ottiene un'asserzione transfinita. Per esempio l'asserzione che, se a è un segno numerico, dev'essere sempre:

$$\mathbf{a} + 1 = 1 + \mathbf{a},$$

dal punto di vista finitista *non è suscettibile di negazione*.[5] Si può chiarire meglio questo punto osservando che tale asserzione non può essere intesa come una combinazione di infinite equazioni numeriche mediante "e", ma solo come un giudizio ipotetico che asserisce qualcosa se è dato un segno numerico.

Da ciò segue in particolare che, dal punto di vista finitista, non si può accettare l'alternativa secondo cui un'equazione come la precedente, in cui compare un segno numerico qualsiasi, o vale per ogni segno numerico oppure può essere refutata con un controesempio. Tale alternativa, essendo un'applicazione del principio del terzo escluso, si fonda sul presupposto che l'asserzione della validità universale dell'equazione sia suscet- tibile di negazione.

Ad ogni modo osserviamo quanto segue: se si rimane, come è necessario, nell'ambito delle asserzioni finitiste, si hanno di solito delle leggi logiche molto complicate, e questa loro complessità diventa insostenibile quando si combinano "per ogni" [176] e "esiste" o quando queste locuzioni compaiono in asserzioni che sono contenute in altre. In breve, le leggi logiche adoperate dagli uomini da quando hanno cominciato a pensare, e scoperte da Aristotele, non sono valide. Naturalmente si potrebbero trovare delle leggi logiche valide pr il dominio delle asserzioni finitiste, ma ciò non sarebbe di alcuna utilità poiché non vogliamo rinunziare all'uso delle

---

[5] [Per la concezione dell'assolutamente infinito come ciò alla cui essenza non appartiene alcuna negazione cfr. Spinoza, *Etica, Parte prima.* Spiegazione del VI Postulato. L'infinito qualitativo hegeliano (quello buono) è la negazione della negazione.]

semplici leggi della logica aristotelica. Inoltre nessuno, neppure se parlasse la lingua degli angeli, potrebbe impedire agli uomini di negare asserzioni generali, di formulare giudizi parziali e dì adoperare il *tertium non datur*. Come dobbiamo regolarci, dunque?

Ricordiamo che *siamo dei matematici* e, come tali, ci siamo spesso trovati in situazioni precarie da cui siamo usciti con l'ingegnoso metodo degli elementi ideali. Ho dato alcuni esempi dell'uso di tale metodo all'inizio di questo articolo. Come venne introdotto $i = \sqrt{-1}$ per poter mantenere nella forma più semplice le leggi dell'algebra, per esempio quelle relative all'esistenza e al numero delle radici di un'equazione; come inoltre si introdussero dei fattori ideali per poter conservare le semplici leggi della divisibilità dei numeri algebrici, per esempio si introdusse un comune divisore ideale dei numeri:

$$2 \text{ e } 1 + \sqrt{-5}$$

sebbene esso non esista realmente; analogamente si devono aggiungere le asserzioni ideali a quelle finitiste per poter conservare le semplici regole formali dell'ordinaria logica aristotelica. Ed è piuttosto strano che i metodi deduttivi attaccati così violentemente da Kronecker siano l'esatto corrispondente di ciò che lo stesso Kronecker ammirava con tanto entusiasmo nell'opera di Kummer sulla teoria dei numeri, da lui esaltata come la più grande conquista della matematica.

Ma come ottenere le "asserzioni ideali"? È un fatto notevole e certamente vantaggioso e promettente che, per farlo, basti proseguire semplicemente, in modo del tutto naturale e coerente, gli sviluppi già compiuti dalla teoria dei fondamenti della matematica. In effetti, bisogna convincersi che anche la matematica elementare va al di là della teoria dei numeri intuitiva. Il metodo del calcolo algebrico con lettere non è compreso [177] nella teoria dei numeri intuitiva, quale è stata da noi costruita. In questa le formule sono sempre adoperate esclusivamente per scopi di comunicazione, le lettere stanno per segni numerici e un'equazione comunica la coincidenza di due segni. Nell'algebra, invece, si considerano le espressioni che contengono delle lettere come strutture a sé, che formalizzano i teoremi intuitivi della teoria dei numeri. Al posto delle asserzioni sui segni numerici si hanno formule che sono esse stesse oggetto concreto di studio intuitivo, e al posto delle dimostrazioni intuitive della teoria dei numeri si hanno derivazioni di formule da altre secondo determinate regole.

Perciò, come si vede, anche nell'algebra si ha una proliferazione di oggetti finitisti. Finora questi erano costituiti solo da segni numerici come 1, 11, ..., 11111; essi soltanto erano oggetto di studio intuitivo. Ma nell'algebra la pratica matematica va oltre. Infatti, anche quando un'asserzione è valida dal punto di vista finitista in base al suo significato, come per esempio nel caso del teorema:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},$$

dove a e b stanno per determinati segni numerici, si preferisce non adoperare questa forma di comunicazione, sostituendola invece con la formula:

$$a + b = b + a,$$

che non comunica immediatamente alcun significato, ma è piuttosto una struttura formale la cui relazione con le vecchie asserzioni finitiste:

$$2+3=3+2$$
$$5+7=7+5$$

è costituita dal fatto che, sostituendo nella formula *a* e *b* con i segni numerici 2, 3, 5, 7 si ottengono in tal modo, cioè con un procedimento dimostrativo (anche se molto semplice), le singole asserzioni finitiste. Se ne conclude perciò che *a*, *b*, =, come del resto l'intera formula:

$$a + b = b + a,$$

di per sé non significano niente, esattamente come i segni numerici; ma dalla formula se ne possono ottenere altre, cui si [178] assegna un significato interpretandole come comunicazioni di asserzioni finitiste. Generalizzando tale conclusione si può concepire la matematica come costituita da due tipi di formule, cioè, in primo luogo da formule che esprimono comunicazioni intuitive di asserzioni finitiste, e in secondo luogo da altre formule che non significano niente, e che costituiscono le *strutture ideali della nostra teoria*.

Ora, qual era il nostro scopo? Nella matematica abbiamo trovato da un lato asserzioni finitiste, che contengono solo segni numerici, per esempio:

$$3>2,\quad 2+3 = 3+2,\qquad 2=3,\qquad 1\neq 1,$$

che dal punto di vista finitista sono intuibili e comprensibili immediatamente, senza bisogno di altre spiegazioni. Esse sono suscettibili di negazione, sia essa vera o falsa; si può applicare loro la logica aristotelica, liberamente e senza alcuna precauzione vale per esse il *tertiurn non datur*, cioè è vera un'asserzione o la sua negazione. Quando si dice che un'asserzione è falsa si intende dire: la sua negazione è vera. Dall'altro lato abbiamo trovato, oltre a queste asserzioni elementari che non presentano problemi, anche asserzioni finitiste più problematiche, per esempio tali che non possono essere scisse in asser- zioni parziali. Infine abbiamo introdotte le asserzioni ideali perché possano valere in generale le comuni leggi della logica; ma poiché esse, cioè le formule, non significano niente in quanto non esprimono asserzioni finitiste, non si possono applicare loro intuitivamente le operazioni logiche, come si fa con le as- serzioni finitiste. È dunque necessario formalizzare anche le operazioni logiche e le dimostrazioni matematiche. La forma- lizzazione richiede che le relazioni logiche siano tradotte in formule, per cui si devono introdurre, oltre ai segni matematici, anche segni logici come:

&,	$\vee$,	$\rightarrow$,	$-$
e	o	implica	non

e, oltre alle variabili matematiche *a*, *b*, *c*, ..., anche variabili logiche *A*, *B*, *C*, ..., cioè variabili che variano su asserzioni. [179]

In che modo? Fortunatamente l'armonia prestabilita che così spesso abbiamo visto intervenire nel corso dello sviluppo storico della scienza, quella armonia prestabilita che venne in aiuto di Einstein facendogli trovare già completamente sviluppato il calcolo generale degli invarianti per la sua teoria della gravitazione, viene anche in nostro aiuto: troviamo già pronto il calcolo logico. Certo questo fu sviluppato in origine per mo- tivi del tutto differenti. I suoi segni furono introdotti originariamente solo per scopi di comunicazione. Tuttavia, è coerente con il nostro punto di vista non attribuire alcun significato ai segni logici, così come non se ne è attribuito alcuno ai segni matematici, e dichiarare che anche le formule del calcolo logico sono elementi ideali che di per sé non significano niente. Con il calcolo logico abbiamo un linguaggio simbolico che permette di tradurre in formule le asserzioni matematiche e di esprimere le deduzioni logiche mediante procedimenti formali. In perfetta analogia col passaggio dalla teoria dei numeri intuitiva all'algebra formale tratteremo ora i segni e i simboli delle operazioni del calcolo logico facendo astrazione dal loro significato intuitivo, ottenendo così infine, invece della scienza matematica intuitiva, che si comunica con il linguaggio ordinario, un insieme di formule composte di segni matematici e logici, generate successivamente secondo determinate regole. Alcune formule corrispondono agli assiomi matematici; le regole secondo cui le formule vengono derivate da altre corrispondono alle deduzioni intuitive. Queste ultime perciò sono sostituite da un procedimento formale retto da regole, e si passa rigorosamente da una trattazione ingenua a una trattazione formale sia nel caso degli assiomi (che, sebbene in origine fossero ritenuti ingenuamente delle verità fondamentali, sono stati considerati a lungo nell'assiomatica moderna come mere relazioni tra concetti) sia in quello del calcolo logico (che in origine era ritenuto solo un linguaggio differente).

Spiegheremo ora brevemente come si formalizzano le dimostrazioni matematiche. Come ho già detto, certe formule che sono come i mattoni della struttura formale della matematica vengono chiamate assiomi. Una dimostrazione matematica è [180] una figura che, come tale, deve essere accessibile alla nostra intuizione. Essa consiste di deduzioni secondo lo schema:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{S}\\ \mathbf{S} \to \mathbf{T}\end{array}}{\mathbf{T},},$$

dove ogni premessa, cioè le formule **S** e **S** → **T**, o è un assioma o è il risultato di una sostituzione in un assioma o è l'ultima formula di una deduzione precedente o è il risultato di una sostituzione in essa. Una formula si dice dimostrabile se è l'ultima formula di una dimostrazione.

La scelta degli assiomi della teoria della dimostrazione ci è suggerita dal nostro stesso programma. Nonostante sia presente in essa un certo grado di arbitrarietà, si possono distinguere come in geometria alcuni gruppi di assiomi qualitativamente differenziati, di ciascuno dei quali diamo qui qualche esempio:

I. Assiomi dell'implicazione:

(i) $A \to (B \to A)$ (aggiunta di un'ipotesi);
(ii) $(B \to C) \to (A \to B) \to (A \to C)$ (eliminazione di un'asserzione).

II. Assiomi della negazione:

(i) $(A \to (B \,\&\, \overline{B})) \to \overline{A}$ (principio di non contraddizione);

(ii) $\overline{\overline{A}} \to A$ (principio della doppia negazione).

Gli assiomi dei gruppi I e II non sono altro che gli assiomi del calcolo degli enunciati.

III. Assiomi transfiniti:

(i) $(a)A(a) \to A(b)$ (deduzione del particolare dall'universale, assioma di Aristotele); [181]

(ii) $\overline{(a)A(a)} \to (Ea)A(a)$ (se un predicato non vale universalmente, c'è un controesempio);

(iii) $\overline{(Ea)A(a)} \to (a)\bar{A}(a)$ (se non c'è alcun esempio di una asserzione, l'asserzione è falsa per ogni a).

A questo punto si scopre un fatto notevole, cioè che questi assiomi transfiniti possono essere derivati tutti da un unico assioma che contiene l'essenziale dell'assioma finora più discusso di tutta la letteratura matematica, il cosiddetto assioma di scelta:

(i') $A(a) \to A(\varepsilon A)$,

dove ε è la funzione di scelta logica transfinita.

Oltre a questi si hanno gli assiomi specificamente matematici:

IV. Assiomi dell'uguaglianza

(i) $a = a$
(ii) $a = b \to (A(a) \to A(b))$,

e infine

V.Assiomi dei numeri

(i) $a + 1 \neq 0$
(ii) assioma di induzione completa.

Siamo così in condizione di sviluppare la nostra teoria della dimostrazione e di costruire il sistema delle formule dimostrabili, cioè la matematica.

Ma nella gioia suscitata, in generale dal successo, e in particolare dall'aver trovato già pronto senza alcuno sforzo da parte nostra uno strumento indispensabile come il calcolo logico, non dobbiamo dimenticare qual è la condizione essenziale del nostro lavoro. C'è infatti una condizione, una sola ma assolutamente indispensabile, cui è sottoposto l'uso del metodo degli elementi [182] ideali, cioè una *dimostrazione di coerenza*. L'estensione di un dominio con l'aggiunta di elementi ideali è legittima solo se non dà luogo a contraddizioni nel vecchio e più ristretto dominio, cioè se le relazioni che sussistono tra le vecchie strutture con l'eliminazione delle strutture ideali continuano ad essere valide nel vecchio dominio.

Il problema della coerenza, nel nostro caso, può essere risolto facilmente. Esso si riduce ovviamente a quello di mostrare che, partendo dagli assiomi e applicando le regole stabilite, non si può avere come ultima formula di una dimostrazione la formula "$1 \neq 1$", cioè che "$1 \neq 1$" non è una formula dimostrabile. Tale compito rientra essenzialmente nell'ambito della trattazione intuitiva, come quello di trovare ad esempio una dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ nella teoria dei numeri intuitiva, cioè una dimostrazione del fatto che è impossibile trovare due segni numerici **a** e **b** che stiano tra loro nella relazione $\mathbf{a}^2 = 2\mathbf{b}^2$, in altri termini che è impossibile trovare due segni numerici con una determinata proprietà. Analogamente dobbiamo mostrare che è impossibile effettuare un certo tipo di dimostrazione. Una dimostrazione formalizzata è un oggetto intuitivo e visibile, come i segni numerici. È interamente comunicabile. Anche la proprietà che deve avere la sua ultima formula, cioè di essere “$1 \neq 1$”, è una proprietà concreta, controllabile. E dato che, di fatto, si può mostrare che è impossibile dare una dimostrazione la cui ultima formula sia la formula in questione, risulta giustificata l’introduzione delle asserzioni ideali.

È altresì una piacevole sorpresa scoprire che, nello stesso tempo, si è risolto un problema che ha tormentato a lungo i matematici, cioè quello di dimostrare la coerenza degli assiomi dell’aritmetica. Quando infatti si adopera il metodo assiomatico, si presenta il problema di dare una dimostrazione di coerenza. Certo, nella scelta, nella comprensione e nell’uso degli assiomi e delle regole non ci si può fondare sulla buona fede o sulla semplice fiducia. Nel caso della geometria e delle teorie fisiche le dimostrazioni di coerenza vengono effettuate riducendo la loro coerenza a quella degli assiomi dell’aritmetica. Tale metodo ovviamente non può essere adoperato nel caso dell’aritmetica. [183] Poiché la nostra teoria della dimostrazione, in base al metodo degli elementi ideali, consente di compiere quest’ultimo im- portante passo, essa costituisce la necessaria chiave di volta dell’edificio teorico dell’assiomatica. Ciò che è già stato sperimen- tato per due volte, la prima con i paradossi del calcolo infinitesimale e la seconda con quelli della teoria degli insiemi, non potrà verificarsi una terza volta né mai più.

La teoria della dimostrazione qui schizzata non solo può rendere sicuri i fondamenti della matematica ma, a mio parere, fornisce anche un metodo generale per trattare questioni fondamentali, che rientrano nell’ambito del pensiero matematico ma che finora non si era riusciti ad affrontare.

In un certo senso la matematica è diventata un tribunale, una corte suprema innanzi a cui portare questioni fondamentali, su una base concreta su cui tutti possono essere d’accordo e che permette di controllare ogni asserzione.[6]

Anche le asserzioni del cosiddetto nuovo “intuizionismo” (per quanto modeste), a mio parere, devono ottenere anzitutto un attestato di validità da questo tribunale.

Un esempio delle questioni fondamentali che si possono trattare in tal modo è fornito dalla tesi secondo cui ogni problema matematico è suscettibile di soluzione. Di ciò siamo tutti convinti. Infatti uno dei principali motivi che ci ind’ucono ad affrontare un problema matematico è che sentiamo sempre dentro di noi la voce: ecco il problema, trova la soluzione. Per trovarla basta pensare: non esistono *ignorabimus* in matematica.[7] Ora la mia teoria della dimostrazione non può fornire un metodo generale per risolvere qualsiasi problema matematico, e del resto un metodo del genere non esiste. Tuttavia rientra interamente nel suo ambito il compito di mostrare che l’ipotesi che ogni problema matematico è suscettibile di soluzione è un’ipotesi coerente .

[L’articolo continua con un tentativo fallimentare di dimostrare l’ipotesi del continuo di Cantor.]

---

[6] [Il tribunale della ragione è un *topos* kantiano.]

[7] [Il teorema di incompletezza dell’aritmetica ha smontato questa illusione illuminista. In paticolare *ignorabimus* se la aritmetica è coerente oppure no. I teoremi di Gödel dimostrano l’esistenza dell’inconscio, cioè dimostrano l’esistenza di un sapere che non si può sapere con mezzi finitisti alla Hilbert.]